

エレクトロニクス

百瀬 宗武

目次

1	電子回路の基礎	2
1.1	受動素子のふるまいと直流回路の基礎	2
1.2	正弦波交流の基礎	8
1.3	簡単な回路の例	11
2	半導体とダイオード	14
2.1	半導体の基礎	14
2.2	ダイオードの基礎	19
2.3	いろいろなダイオード	20
3	トランジスタと MOS-FET	21
3.1	トランジスタとは?	21
3.2	トランジスタの基本動作	22
3.3	トランジスタを利用した簡単な回路例	23
3.4	MOS-FET	24
4	オペアンプと基本的な回路	26
4.1	オペアンプとは?	26
4.2	オペアンプを使った基本回路	26
5	信号処理と雑音の基礎理論	30
5.1	フーリエ変換・信号の周波数成分	30
5.2	線形系の記述と周波数応答	36
5.3	ランダム信号（雑音）の記述	39
5.4	実際の回路例	41

1 電子回路の基礎

1.1 受動素子のふるまいと直流回路の基礎

1.1.1 抵抗

- オームの法則：電気抵抗 R の両端の電位差（電圧）を V ，流れる電流を I とすると，

$$V = RI. \quad (1)$$

- 通常使われる単位

- V ：ボルト (V)。
- I ：アンペア (A)。
- R ：オーム (Ω)。

- 一様な物質の抵抗：断面積 S ，長さ L として，

$$R = \rho \left(\frac{L}{S} \right) = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{L}{S} \right). \quad (2)$$

ρ ：抵抗率， σ ：電気伝導率（物質による量）。

- 抵抗 (R) の逆数：“コンダクタンス” (G) と呼ぶ。単位はジーメンズ (S)。
- N 個直列に接続した場合の合成抵抗 (R)：各抵抗の大きさ R_k とすると，

$$V = \sum_{k=1}^N R_k I$$

なので，

$$R = \sum_{k=1}^N R_k. \quad (3)$$

※式 (2) で L をのばすことに相当。

- N 個並列に接続した場合の合成抵抗 (R)：各抵抗の大きさ R_k とすると，流れる電流は

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^N I_k \\ &= V \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} \right) \end{aligned}$$

なので，

$$\left(\frac{1}{R} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{R_k} \right). \quad (4)$$

※式 (2) で S を増やすことに相当。

- 式 (4) でコンダクタンス $G_k = 1/R_k$ を使うと,

$$G = \sum_{k=1}^N G_k. \quad (5)$$

1.1.2 コンデンサ

- 電荷を蓄える素子。
- 容量 C のコンデンサの両極間電圧を V , 蓄えられている電荷量を $\pm Q$ とすると,

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt. \quad (6)$$

ここで I はコンデンサを流れる電流。

- 通常使われる単位
 - Q : クーロン (C)。
 - C : ファラド (F)。
- 平行平板コンデンサの容量: 断面積 S , 極板間距離 d として, コンデンサ中の電場の強さ E は

$$E = \left(\frac{V}{d} \right).$$

一方, 導体表面を含む微小体積でガウスの法則を適用すると,

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{S} \right).$$

ただし, ϵ_0 は真空の誘電率。これらから E を消すと

$$Q = \left(\epsilon_0 \frac{S}{d} \right) V.$$

括弧の中が C になる。

※極板間を誘電率 ϵ の物質で満たすと,

$$C = \left(\epsilon \frac{S}{d} \right).$$

※コンデンサには耐えられる限界の電圧 (耐圧) あり。それ以上電圧かけると破壊。

- N 個直列に接続した場合の合成容量 (C): すべてのコンデンサに蓄えられる電荷量は等しいので, 各コンデンサ容量を C_k として,

$$\begin{aligned} V &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{Q}{C_k} \right) \\ &= Q \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \right). \end{aligned}$$

よって,

$$\left(\frac{1}{C}\right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{C_k}\right). \quad (7)$$

- N 個並列に接続した場合：すべてに同じ電圧がかかる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q_k}{C_k} \text{ for all } k. \\ \rightarrow \sum_{i=1}^N Q_k &= \left(\sum_{k=1}^N C_k\right) V. \end{aligned}$$

よって

$$C = \sum_{k=1}^N C_k. \quad (8)$$

1.1.3 コイル (インダクタ)

- 電流変化に応じて電圧を誘起する素子。
- 自己インダクタンス L のコイルの両極間電圧を V , 流れる電流を I とすると,

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (9)$$

- L に通常使われる単位：ヘンリー (H)。
- N 個直列に接続した場合の合成インダクタンス (L): 各インダクタンスを L_k とすると,

$$V = \sum_{k=1}^N \left(L_k \frac{dI}{dt}\right)$$

なので,

$$L = \sum_{k=1}^N L_k. \quad (10)$$

- N 個並列に接続した場合：全電流を I として,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \sum_{k=1}^N \frac{dI_k}{dt} \\ &= V \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k}\right) \end{aligned}$$

なので,

$$\left(\frac{1}{L}\right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{L_k}\right). \quad (11)$$

1.1.4 キルヒホッフの法則

- 多数の抵抗と起電力 E からなる回路網を流れる電流のもつ関係。
- **第一法則**： 回路網中の 1 点 P につながる N 本の電線から P に向かって流れる電流を I_k ($i = 1, \dots, N$) とすると、その総和はゼロ。つまり、

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0.$$

- **第二法則**： 回路網中の任意の閉じた道筋にそって N 個の抵抗 (R_k ($k = 1, \dots, N$))：それぞれ流れる電流を I_k), M 個の起電力 (E_l ($l = 1, \dots, M$)) があつたとき、

$$\sum_{k=1}^N R_k I_k = \sum_{l=1}^M E_l.$$

- 起電力をもつ装置：電源と呼ぶ。起電力 E , 端子電圧を V とすると、電流 I をとると V は降下。

$$V = E - R_0 I$$

と表されるとき、 R_0 を内部抵抗と呼ぶ。

1.1.5 簡単な回路解析の例

(i) 抵抗のみからなる回路

- テブナン (Thevenin) の定理：複数の R と E を組み合わせた複雑な 2 端子回路は、以下のよ
うな電源と等価。
 - 起電力 (E_{eq})：2 端子間に何も接続しないときの電圧。
 - 内部抵抗 (R_{eq})：回路内のすべての E をゼロにしたときの端子間抵抗。※キルヒホッフの法則から証明可能。
※複雑な回路と同等の特徴をもつ回路：“等価回路”と呼ぶ。
- 例 1) 複数の抵抗からなる回路： 1Ω の抵抗に流れる電流は？
 - 中心より左側の等価回路は、テブナンの定理より、 $E_{eq} = 10V$, $R_{eq} = 2\Omega$ 。
 - これにさらに 2Ω 抵抗が直列につくので、全体の“内部抵抗”は $R_{eq} = 4\Omega$ 。
 - つまり 1Ω の抵抗に流れる電流は、 $2A$ 。
- 例 2) ホイートストーンブリッジ：真ん中の抵抗 R を流れる電流は？
 - R をとったとき、その両端に対する等価回路はどうなるか。

$$E_{eq} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) E$$
$$R_{eq} = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)$$

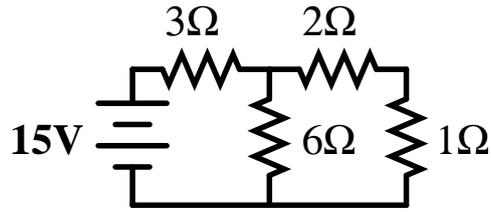


図1 複数の抵抗からなる回路

– 抵抗を流れる電流 I は,

$$I = \frac{E_{eq}}{R_{eq} + R}$$

– これがゼロになるのは、もちろん

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

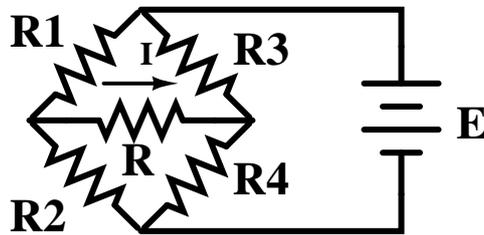


図2 ホイートストーンブリッジ

- ノートン (Norton) の定理：テブナンの定理で表される等価回路は，
 - R_{eq} の抵抗，
 - 内部抵抗 ∞ で $I_{eq} = E_{eq}/R_{eq}$ の定電流源，
 を並列につないだ 2 端子回路でも等価。

(ii) RC 回路の過渡特性

- この回路の SW を開いたとき時はどうふるまうか？

$$0 = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}. \quad (12)$$

- まず $Q = Ae^{\alpha t}$ とおき，式 (12) に代入。 α が満たすべき条件は

$$\alpha = -\frac{1}{RC}.$$

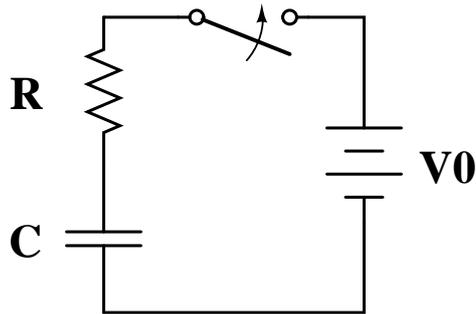


図3 RC回路

初期条件 $Q = CV_0$ at $t = 0$ でとくと,

$$Q = CV_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

- 完全に放電した後, 再びスイッチを閉じると?

$$V_0 = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}. \quad (13)$$

- 式 (13) の解: 式 (12) (斉次形の微分方程式) の一般解 $Q = A \exp(-t/RC)$ を修正した

$$Q = A(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

の形をもつ。これを式 (13) に代入。 $A(t)$ が満たすべき式は,

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{V_0}{R} \exp\left(\frac{t}{RC}\right).$$

$$\rightarrow A(t) = B + CV_0 \exp(t/RC).$$

(B はある定数)。つまり,

$$Q = B \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + CV_0.$$

- 初期条件 $t = 0$ で $Q = 0$ から B を決めると,

$$Q = CV_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right],$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

1.2 正弦波交流の基礎

1.2.1 瞬時値と実効値

- 正弦波交流回路の電流と電圧の関係。
 - 周期, 角周波数, 周波数, 位相差の関係を図で説明。
 - 電圧と電流: 同相とは限らない (例えば式 (6), (9) 見よ)。
- 例えば, 瞬時値として

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (14)$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \theta) \quad (15)$$

の場合を考える。 ω は角周波数, θ が位相差, V_0, I_0 はそれぞれ瞬時値の最大。

- 電圧 (電流) の実効値: 1 周期にわたった 2 乗平方根の平均で定義。つまり, $T = (2\pi/\omega)$ として

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (V_0^2 \cos^2 \omega t) dt} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}. \quad (16)$$

電流の場合も同様で

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (17)$$

例えば “100V の交流” といった場合, 通常, $V_e = 100\text{V}$ の意味。

- 電力はどうか?: 1 周期にわたった平均値 (時間平均) で定義。式 (14), (15) の場合,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T V(t)I(t)dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) dt \\ &= \frac{1}{2} V_0 I_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (18)$$

あるいは実効値 (16), (17) を使うと,

$$P = V_e I_e \cos \theta. \quad (19)$$

ここで, $\cos \theta$ のことを “力率” と呼ぶ。

- $\theta = \pm\pi/2$ の場合 (e.g., コンデンサ, コイル) の場合, $P = 0$ 。このような電流を “無効電流” と呼ぶ。

1.2.2 複素数による交流の表記

※ここからしばらくは複素数の電圧・電流を小文字 (v, i) で表記。

- 複雑な交流回路の場合, 実数表示は不便。

- 三角関数の計算が煩雑。
- 振幅・位相差の関係が見にくい。

例：位相差 ϕ の2つの電圧の足し算。

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= \cos \omega t + \cos(\omega t + \phi) \\ &= 2 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right). \end{aligned}$$

(積を和に直す公式！)

しかし、振幅が異なる場合や3つ以上の足し算だと超複雑、振幅と位相の切り分けも困難。

- 複素での表記：虚数単位 j (ただし $j^2 = -1$) として、オイラーの式

$$\exp(j\phi) = \cos \phi + j \sin \phi$$

を用い、例えば、実信号 $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ に対しては、

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{V_0}{2} \left(e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)} \right) \\ &= v_m e^{j\omega t} + v_m^* e^{-j\omega t}. \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、

$$v_m = \frac{V_0}{2} e^{j\phi} \quad (21)$$

は複素振幅で、 $v_m^* = (V_0/2)e^{-j\phi}$ はその複素共役。

- 複素表記のメリットは？
 - 計算が簡単 (後述)。
 - 固定位相項を複素振幅 (21) で表現。
 - 負の周波数の形式的導入：後の一般化 (フーリエ解析) が楽 (§ 5)。
 - 実信号：正の周波数だけ考えれば良い (負は複素共役)。
- 信号の和：単純に足す。

$$\begin{aligned} [v_{m1} + v_{m2}]e^{j\omega t} + [v_{m1}^* + v_{m2}^*]e^{-j\omega t} \\ = v_m e^{j\omega t} + v_m^* e^{-j\omega t}. \end{aligned} \quad (22)$$

つまり、複素振幅だけみれば $v_{m1} + v_{m2} = v$ 。これは複素平面上のベクトル足し算に他ならない。

- 電力の計算。

$$\begin{aligned} P &= \overline{[v_m e^{j\omega t} + v_m^* e^{-j\omega t}] \times [i_m e^{j\omega t} + i_m^* e^{-j\omega t}]} \\ &= v_m i_m^* + v_m^* i_m = 2\Re(v_m i_m^*). \end{aligned} \quad (23)$$

但し \Re は実部を表す。こちらも、基本的に複素振幅同士の積の格好。

1.2.3 Analytic Signal

- 前章では複素数を用いた表現をしたが、別の複素表現として、“Analytic Signal” あり。
- 実信号 $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ の Analytic Signal は、位相項を単純に \exp の肩に乗っけることで得られ、

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &= V_0 e^{j(\omega t + \phi)} \\ &= (V_0 e^{j\phi}) e^{j\omega t} = \tilde{v}_m e^{j\omega t}.\end{aligned}\tag{24}$$

(数学的な背景は省略。)

- 工学系の教科書で“複素信号（電圧，電流）”といえは大抵こちら。
- Analytic Signal - $\tilde{v}(t)$ の性質：
 - 実部が実信号 $V(t)$ に相当。
 - 実信号を複素表示した式 (20) との比較。
 1. $e^{j\omega t}$ の項は式 (20) の 2 倍（つまり， $2v_m = \tilde{v}_m$ ，式 (21) も参照）。
 2. 式 (20) の $e^{-j\omega t}$ の項がない。
- 信号の和：式 (22) と同様。
- 電力：必ずそれぞれ実部をとってから計算を行う。例えば

$$\begin{aligned}P &= \overline{\Re[\tilde{v}_m e^{j\omega t}] \times \Re[\tilde{i}_m e^{j\omega t}]} \\ &= \frac{[\tilde{v} + \tilde{v}^*]}{2} \times \frac{[\tilde{i} + \tilde{i}^*]}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{v}\tilde{i}^* + \tilde{v}^*\tilde{i}) = \frac{1}{2} \Re(\tilde{v}\tilde{i}^*).\end{aligned}\tag{25}$$

$\tilde{v}_m = 2v_m, \tilde{i}_m = 2i_m$ を考慮すると，式 (23) と同一であることが分かる。

※注：線形系では Analytic Signal の方が表記が簡明。ただ後に出てくる異なる周波数成分の Mixing など，より複雑な演算は混乱を招くので要注意。

1.2.4 インピーダンス

- 交流回路に流れる電圧，電流を $V(t), I(t)$ とし，その Analytic Signal を \tilde{v}, \tilde{i} (式 (24) 参照)。このとき、

$$Z = \frac{\tilde{v}}{\tilde{i}} \left(= \frac{v_m}{i_m} \right).\tag{26}$$

を（複素）インピーダンスと呼ぶ。単位は Ω 。

※ $V(t), I(t)$ に対し式 (21) で定義される複素振幅の比でもある（括弧内）。

※オームの法則- 式 (1) と対応。

- コンデンサ (式 (6)) : $Z = 1/(j\omega C)$ 。
- コイルの場合 (式 (9)) : $Z = j\omega L$

- Z は複素量であり,

$$Z = R + jX. \quad (27)$$

R は抵抗, X はリアクタンスと呼ばれる。

- また, Z の逆数 Y をアドミタンスと呼び,

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB. \quad (28)$$

G はコンダクタンス, B はサセプタンスと呼ばれる。

- N 個の素子を直列につないだ場合, 合成インピーダンスは

$$Z = \sum_{k=1}^N Z_k. \quad (29)$$

並列につないだ場合は,

$$\left(\frac{1}{Z}\right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{Z_k}\right). \quad (30)$$

これをアドミタンスで表すと,

$$Y = \sum_{k=1}^N Y_k. \quad (31)$$

これらは抵抗に対する式 (3), (4), (5) の時と同様に導出できる。

- キルヒホッフの法則やテブナンの定理: V, I を \tilde{v}, \tilde{i} で表し, 抵抗の代わりにインピーダンスを使うと成立。
- 回路の電力はどうか? 式 (25) より,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \Re(\tilde{v}\tilde{i}^*) \\ &= \frac{|\tilde{i}|^2}{2} \Re(Z) \\ &= \frac{I_0^2}{2} R. \end{aligned} \quad (32)$$

つまりリアクタンスは電力の大小に寄与しない (以前やった力率の議論: 式 (18), (19) とも比較せよ)。

1.3 簡単な回路の例

1.3.1 インピーダンス・マッチング

- 起電力 E , 内部インピーダンス Z_0 の電源を考える。これに Z の負荷をつなげ, 取り出せる電力を最大にするには?

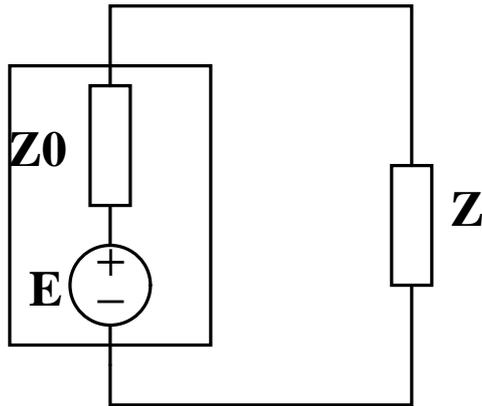


図4 インピーダンス・マッチング

- 流れる電流は

$$\tilde{i} = \frac{E}{Z_0 + Z}.$$

パワーは式 (25) を用いて

$$\begin{aligned} P &= \frac{|E|^2}{2|Z_0 + Z|^2} \Re(Z) \\ &= \frac{|E|^2}{2} \left(\frac{R}{(R + R_0)^2 + (X + X_0)^2} \right). \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} Z &= R + jX, \\ Z_0 &= R_0 + jX_0. \end{aligned}$$

とした。

- ここで,

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X} = 0,$$

を解くことで P_{max} とその実現条件が得られ,

$$\begin{aligned} R &= R_0, \quad X = -X_0, \quad (Z = Z_0^*), \\ P_{max} &= \frac{|E|^2}{8R_0}. \end{aligned}$$

となる (各自で確かめよ)。

1.3.2 RCL 直列回路

- この回路の振る舞いを表す微分方程式は

$$V = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I dt. \quad (33)$$

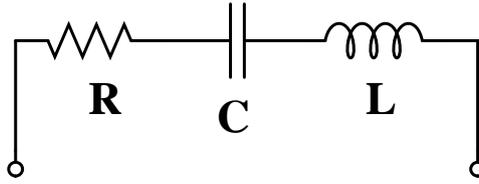


図5 RCL直列回路

これをまともに解いても良いが，複素表現により時間変化する項がつねに $e^{j\omega t}$ の場合，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &\rightarrow j\omega \\ \int dt &\rightarrow \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

と置き換えれば良い。すると式 (33) は，

$$\tilde{v} = \left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) \tilde{i}, \quad (34)$$

ただし，電流，電圧には Analytic Signal を用いた。

- 括弧内が合成インピーダンス。式 (29) で考えたものに他ならない。これを書き換え。

$$\begin{aligned} Z &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \\ &= |Z| e^{j\delta} \end{aligned} \quad (35)$$

ただし，

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}, \\ \cos \delta &= \frac{R}{|Z|}, \quad \sin \delta = \frac{\omega L - (\omega C)^{-1}}{|Z|}. \end{aligned}$$

- 例えば $\tilde{v} = V_0 e^{j\omega t}$ (つまり， $V = V_0 \cos \omega t$) の場合，式 (34), (35) より，

$$\begin{aligned} \tilde{i} &= \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \delta)} : \text{この実部をとると,} \\ I &= I_0 \cos(\omega t - \delta) : \text{但し, } I_0 = \frac{V_0}{|Z|}. \end{aligned}$$

つまり， $\omega = 1/\sqrt{LC}$ のとき， $\delta = 0$ で I_0 が最大 (直列共振)。

1.3.3 RCL 並列回路

- 並列の場合，インピーダンスよりアドミタンスの方がすっきり。

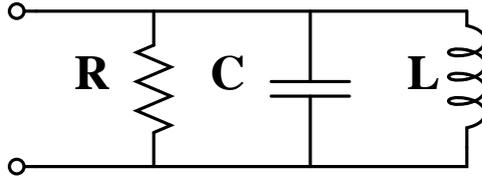


図6 RCL 並列回路

- 合成アドミタンスを Y とすると, 式 (31) より

$$\begin{aligned}
 Y = \frac{1}{Z} &= \left(j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right) \\
 &= G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \\
 &= |Y| e^{-j\delta'}
 \end{aligned} \tag{36}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 G = \frac{1}{R}, \quad |Y| &= \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}, \\
 \cos \delta' &= \frac{G}{|Y|}, \quad -\sin \delta' = \frac{\omega C - (\omega L)^{-1}}{|Y|}.
 \end{aligned}$$

式 (35) から $Z \rightarrow Y, R \rightarrow G, \delta \rightarrow -\delta', C \leftrightarrow L$ 。

- また, 電流と電圧の関係は

$$\tilde{v} = Z \tilde{i} = \frac{\tilde{i}}{Y}. \tag{37}$$

- 例えば $\tilde{v} = V_0 e^{j\omega t}$ ($V = V_0 \cos \omega t$) の場合, 式 (36), (37) より,

$$\begin{aligned}
 \tilde{i} &= \tilde{v} Y = V_0 |Y| e^{j(\omega t - \delta')}, \\
 I &= I_0 \cos(\omega t - \delta') : \text{但し, } I_0 = |Y| V_0.
 \end{aligned}$$

やはり, $\omega = 1/\sqrt{LC}$ のとき, $\delta' = 0$ で I_0 が極値 (最小) もつ (並列共振)。

2 半導体とダイオード

2.1 半導体の基礎

2.1.1 導体, 不導体, 半導体

- 半導体: 導体 (金属) と不導体 (絶縁体) の中間的性質をもつ物質。抵抗率と ρ して
 - 金属: $\rho \sim 10^{-8} \Omega \text{ m}$.
 - 絶縁体: $\rho \gtrsim 10^{12} \Omega \text{ m}$.

- 半導体： $\rho \sim (10^{-4} - 10^7) \Omega \text{ m}$.
- 半導体デバイス (ダイオード, トランジスタ, IC = 集積回路)：エレクトロニクスの大発展。

2.1.2 エネルギー帯

- 単独原子内の電子：決まったエネルギー状態 (エネルギー準位) をとる。
 - 例： ^{14}Si 原子の場合： $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$,
or $[\text{Ne}]3s^2 3p^2$
- 固体ではどうか？ → エネルギー帯 (energy band)。
- エネルギー帯の間：許容状態なし = 禁制帯 (forbidden band)。

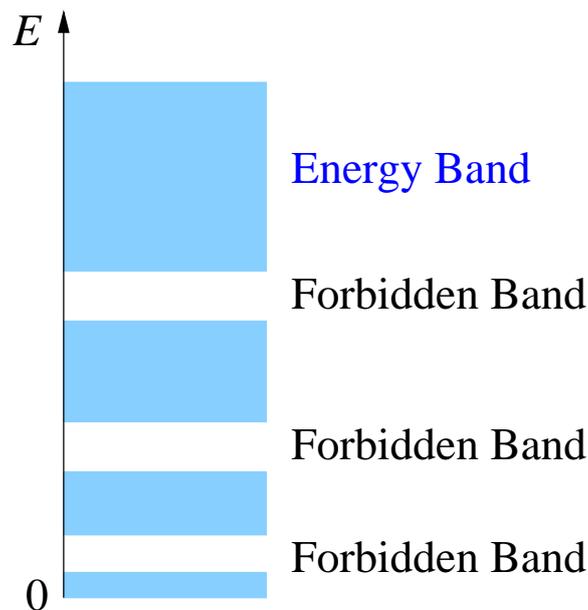


図7 エネルギー帯と禁制帯

- (参考) 結晶 = 周期型ポテンシャル下での波動関数：時間非依存のシュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) = \mathcal{E}_k \Psi(\vec{r})$$

で、ポテンシャル V が単位格子ベクトル \vec{T} に対し

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{T}) = V(\vec{r} + 2\vec{T}) = \dots$$

のように周期的に変化する場合、 $\Psi(\vec{r})$ はブロッホ関数、

$$\Psi(\vec{r}) = e^{j\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}),$$

但し、 $u_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{T})$ を満たす。

となる。 \vec{k} は波数ベクトル。

- 禁制帯：ブロッホ形の解がないエネルギー領域。
 ※ $V(\vec{r}) = 0$ (自由電子モデル) のときは、
 運動量 $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, エネルギー $\mathcal{E}_k = (\hbar^2|\vec{k}|^2/2m)$ 。
 ※ 詳しくは固体物理学の教科書を参照 (e.g., キッテルのものなど)。
- 固体中の電子の分布：パウリの原理したがってエネルギーの低い方から占有。フェルミ分布に従う。
- エネルギー $[\mathcal{E}, \mathcal{E} + d\mathcal{E}]$ の状態に電子が入っている確率は

$$f(\mathcal{E})d\mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_F}{kT}\right)}. \quad (38)$$

“フェルミ分布関数”。 \mathcal{E}_F は化学ポテンシャル (T , 電子数密度の関数), “フェルミ準位”とも呼ぶ。

- 特に, $T = 0$ の時の \mathcal{E}_F : フェルミ・エネルギーと呼ぶ。
- すべての状態が電子で埋まっている下の方のエネルギー帯: “充満帯 (filled band)”。

2.1.3 抵抗率の違いの原因

物質ごとの電子分布の様相の違い → 電場をかけたときの電子の振る舞いの違い, ρ の違い。

- 金属 (導体) の場合
 - ある禁制帯より下はすべて充満帯。
 - その上のバンドの一部を電子占有 = “伝導帯 (conduction band)”。
 - 伝導帯の電子
 - * 電場ないとき: \vec{p} の向きランダム。
 - * 電場があると \vec{p} の向きそろって = 電流。
 - 絶縁体の場合
 - ある禁制帯より下はすべて充満帯。その上のバンドは空。
 - 原子間の結合に全電子使われることに相当 = “価電子帯 (valence band)”。
 - 価電子帯の電子: 電場をかけても状態変化できない (電流流れず)。
 - 半導体の場合
 - 低温下では絶縁体と同じ。但し, 価電子帯の上の禁制帯のエネルギー幅は小。
 - 温度上昇: いくつかの電子が熱的に励起, 伝導帯を構成。
 - 価電子帯から電子が抜けた場所: “正孔 (positive hole)”。
 - 電場をかけると伝導帯の電子, 正孔が動く = 電流。
 - 電流の担い手 (電子, 正孔): “キャリア” と呼ぶ。
- ※ 純粋な半導体 (真性半導体): 電子と正孔の数密度が等しい。不純物を含む半導体ではそうならない (後述)。

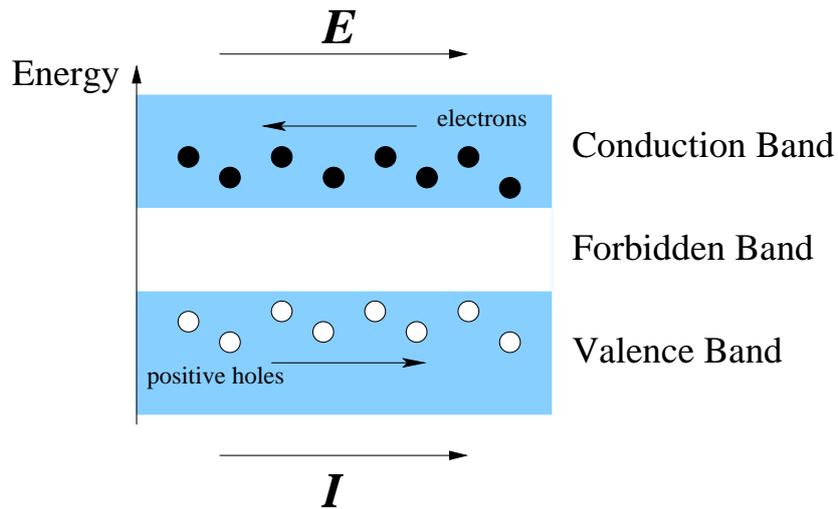


図8 半導体中の電流

2.1.4 半導体中の電流

- (i) ドリフト電流

- 電場がかかったときのキャリア移動（ドリフト）に伴う電流。
- 電子による電流密度 \vec{i}_e は，電子密度 n_e として

$$\vec{i}_e = -en_e\vec{v}_e,$$

となるが， $\vec{v}_e (\propto -\vec{E}) = -\mu_e\vec{E}$ が成り立つ時，

$$\vec{i}_e = en_e\mu_e\vec{E} = \sigma_e\vec{E}.$$

ここで， μ_e を移動度と呼ぶ。 σ_e は電気伝導率に対応（オームの法則：式 (1) と式 (2) を参照）。

- 正孔による電流成分 (\vec{i}_p) も同様。すると合計の電流密度は，

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \vec{i}_e + \vec{i}_p \\ &= e(n_e\mu_e + n_p\mu_p)\vec{E} \\ &= \sigma\vec{E}. \end{aligned} \tag{39}$$

$$\sigma = e(n_e\mu_e + n_p\mu_p).$$

- 電気伝導率 (σ)：キャリアの濃度，移動度 (μ_e, μ_p) の温度依存性で変化。

- (ii) 拡散電流

- キャリア数密度 (n) の不均一に伴う電流（高密度領域から低密度領域へキャリアが拡散）。
- 拡散速度 $= -D\nabla n$ なので，拡散電流密度 $\vec{i}^{(d)}$ は，

$$\vec{i}^{(d)} = e(n_eD_e\nabla n_e - n_pD_p\nabla n_p). \tag{40}$$

- 半導体中の電流：式 (39), (40) の和。統計力学を使うと、移動度 μ と拡散係数 D の間に

$$\frac{\mu}{D} = \frac{e}{kT}$$

なる関係あることが導ける（アインシュタインの関係式）。

2.1.5 真性半導体と n 型・p 型半導体

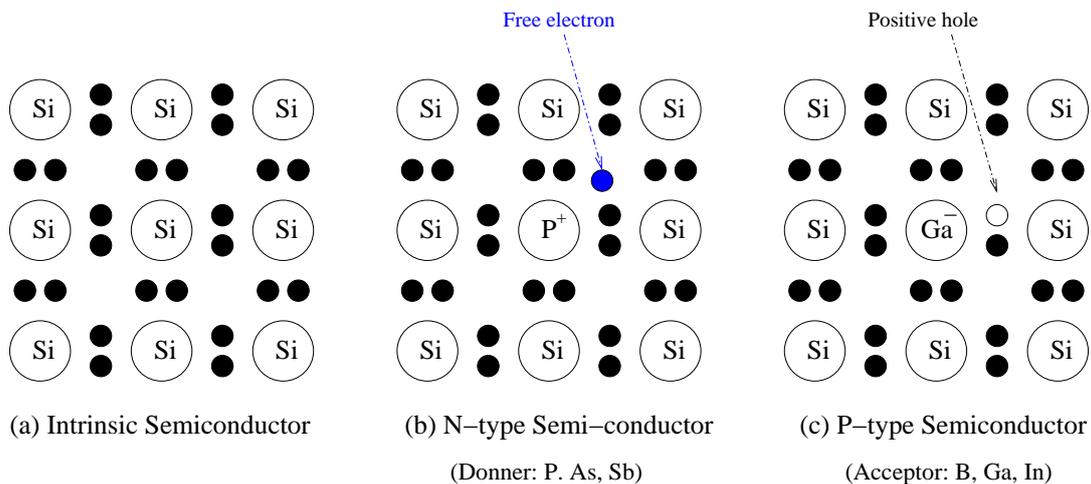


図9 真性半導体, n 型半導体, p 型半導体

- 真性半導体：Si, Ge。
 - 共有結合による結晶。
 - 自由電子数＝正孔数。
 - キャリア数密度が小，温度により変化 → 半導体デバイスとしては使いにくい。
 - n 型半導体
 - 不純物＝“ドナー”：V 族元素，e.g., P(リン), As(ヒ素), Sb(アンチモン)。自由電子を提供。
 - 多数キャリア＝電子，少数キャリア＝正孔（両方ある）。
 - p 型半導体
 - 不純物＝“アクセプタ”：III 族元素，e.g., B(ホウ素), Ga(ガリウム), In(インジウム)。価電子の欠乏＝正孔を提供。
 - 多数キャリア＝正孔，少数キャリア＝電子。
- ※不純物濃度に応じてキャリア濃度が変化 → 抵抗率の制御（式 (39) 参照）。

2.2 ダイオードの基礎

2.2.1 pn 接合の振る舞い

- p 型と n 型半導体を接触させたもの：pn 接合。
- pn 接合をもつ半導体素子：ダイオード
- pn 接合の様子
 - 接合面付近：拡散で電子と正孔が結合消滅=空乏層 → 一種のコンデンサを形成。
 - * 電位差 ϕ_d ：障壁電位差（拡散電位差）
 - * 電子・正孔のエネルギー障壁 = $e\phi_d$.

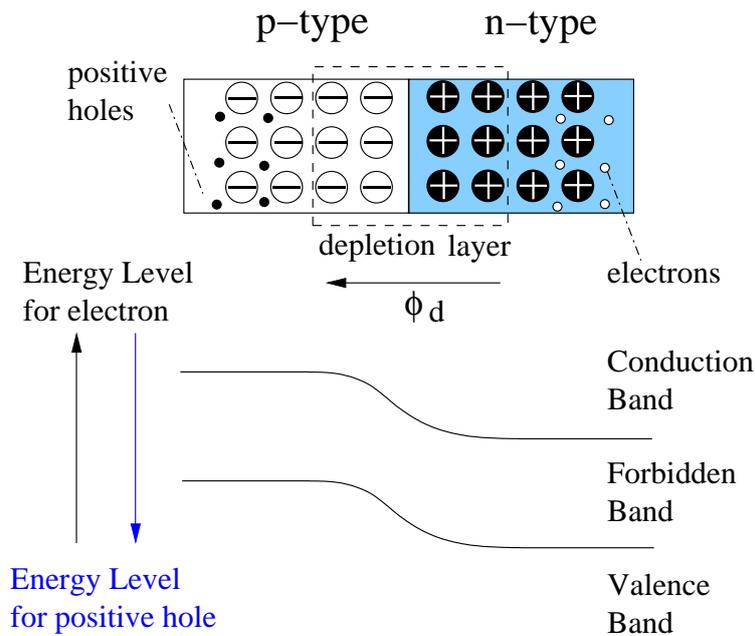


図 10 pn 接合の様子

- 両端に電圧かけたときの基本的な振る舞い：p 側の電位を V_p , n 側の電位を V_n 。
 1. $V_p > V_n$ (順バイアス)：障壁電位差 ϕ_d を打ち消す方向，電流が流れる。
 ※ pn 境界で電子と正孔が結合し消滅，しかし両端から常に供給。
 2. $V_p < V_n$ (逆バイアス)：エネルギー障壁が広がる方向，電流は流れない。
 つまり，電流は p→n の方向にしか流れない = “ダイオード”。

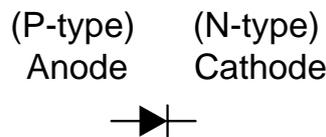


図 11 ダイオードの記号

p 側を“アノード”，n 側を“カソード”と呼ぶ。

- 実際の電流-電圧曲線：半導体内の電子，正孔のエネルギー分布から得られる理論曲線は

$$I = I_s \left[\exp\left(\frac{eV}{kT}\right) - 1 \right]. \quad (41)$$

但し， $V = V_p - V_n$ ， $I > 0$ は p→n の向き。 I_s ：飽和電流と呼ぶ。

- $V > 0$ の時，式 (41) 中の指数項が急激に大。“順電流”。
- $V < 0$ の時，式 (41) 中の指数項が急激にゼロ。 $I \rightarrow -I_s$ (通常小さい)。“逆電流”。
- 実際：逆電圧を増加 → ある電圧で逆電流急激に増加：電圧ほぼ一定 (ツェナー効果)。
(p 型の価電子帯の電子が n 型の伝導帯へトンネル効果で移る。絵で説明。)
- (空乏層の厚いもので似た現象) 電子なだれ：少数キャリア (p 型の電子) が大きな電位差で加速 → 価電子帯電子を励起，それらがねずみ算式に (破壊電圧)。

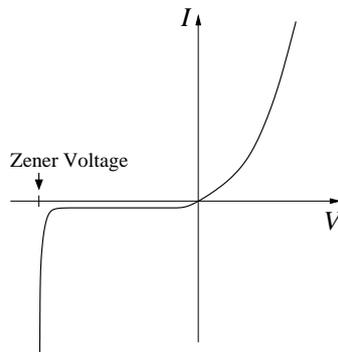


図 12 ダイオードの電流電圧特性

- ツェナーダイオード：ツェナー効果で定電圧を得るもの。



図 13 ツェナーダイオードの記号

2.2.2 ダイオードを用いた簡単な回路

1. 整流回路
2. 波形操作回路

デバイスに電圧信号を供給する場合の，過大入力を防ぐ回路や一定電圧を供給できる回路。

2.3 いろいろなダイオード

- トンネルダイオード (江崎玲於奈発明)：p 型，n 型中の不純物濃度を著しく高くし，順バイアス中でもトンネル電流が流れるようにしたもの。超高周波発振回路やパルス回路で使用。

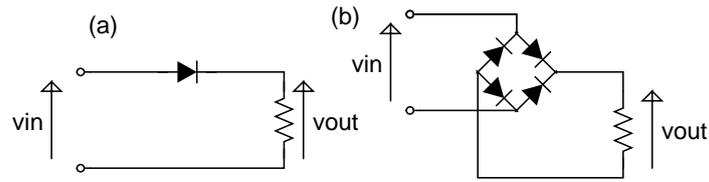


図 14 (a) 半波整流回路, (b) 全波整流回路。

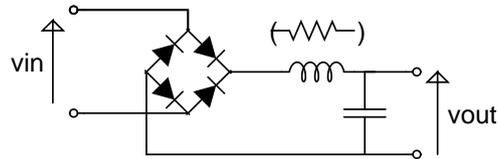


図 15 整流回路と RC を組み合わせた平滑回路

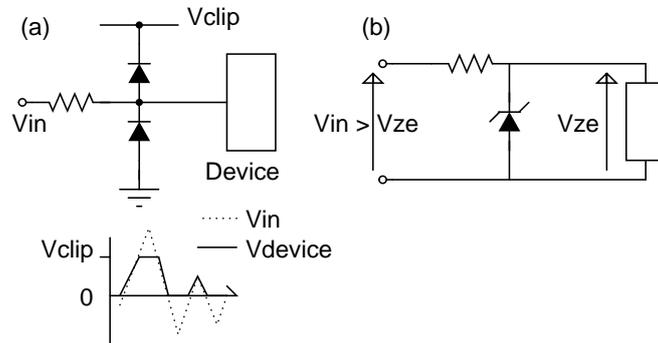


図 16 (a) デバイス入力を $[0, V_{clip}]$ にする回路, (b) ツェナーダイオードを利用した定電圧回路。

- 発光ダイオード (LED)・レーザーダイオード：pn 接合面で電子・正孔の結合消滅時のエネルギー差に応じた光を発光するもの。
- 光-電気変換素子 (フォトダイオード, 太陽電池など)：pn 接合面で禁制帯幅より大きなエネルギーをもつ photon を吸収し, 電気エネルギーを生じるもの。
- ショットキーダイオード：金属-半導体接触による整流作用。
- マイクロ波発振ダイオード (ガンダイオードなど)：マイクロ波 (波長 10 - 1cm の電波) をダイオードの電流電圧特性を利用して発生。

3 トランジスタと MOS-FET

3.1 トランジスタとは？

- ある半導体を別の種類の半導体で挟んだような構造 (npn 型 or pnp 型)。
- エミッタ (E)・ベース (B)・コレクタ (C)。

- キャリア密度： $E \gg B \gg C$ 。E と C は入れ替え不可。
- ベースは非常に薄く作る。
- 記号の矢印：エミッタ中での電流の向きに対応（詳しくは次章で）。

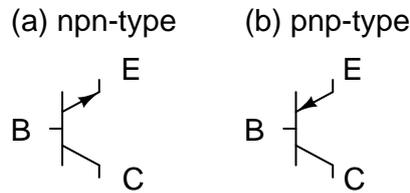


図 17 トランジスタの記号

3.2 トランジスタの基本動作

※ npn 型を例に基本動作説明。

- $V_e < V_b < V_c$ となるように電圧かける。

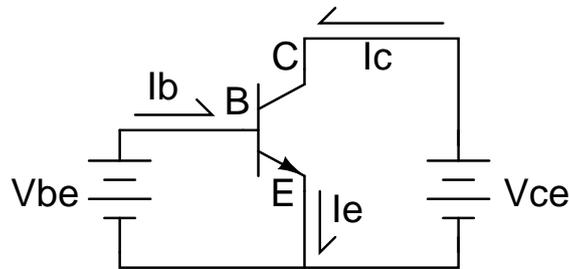


図 18 エミッタ接地（共通エミッタ）方式

- BE の pn 接合：順バイアス ($V_{be} = V_b - V_e$)，電子が E → B。
- B での正孔・電子結合消滅はわずか（キャリア密度の違い），B は厚みが薄いので大部分の電子が C へ。
- C へ移った電子： $V_{cb} = V_c - V_b$ で加速され端まで到達 → CE 間で電流流れる。
- E からの電子が B を通過する割合を α (~ 0.99) とすると，

$$\begin{aligned} I_c &= \alpha I_e, \\ I_b &= (1 - \alpha) I_e \text{ (B への正孔の補充)}, \\ I_e &= I_c + I_b. \end{aligned}$$

つまり，

$$I_c = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} I_b = h_{FE} I_b. \quad (42)$$

h_{FE} (≈ 100) を“電流増幅率”と呼ぶ。

- $h_{FE} : V_{ce} = V_c - V_e$ (や温度) によって変化。→ コレクタ特性: $I_b = \text{一定のときの } V_{ce}$ vs. I_e の関係。

3.3 トランジスタを利用した簡単な回路例

3.3.1 共通エミッタ方式の増幅回路

- 実際の回路 (a) : 単一のバイアス, 欲しい V_b, V_e を得るために R_1, R_2 を調整。安定化のためエミッタに抵抗, コンデンサ入れる。

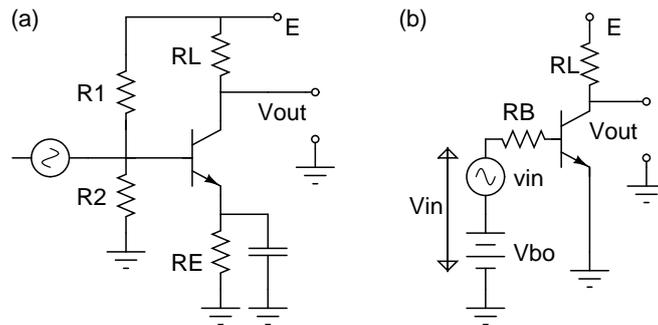


図 19 (a) 実際の回路, (b) 簡略化した回路

- 原理的には図 (b)。式 (42) より

$$\begin{aligned}
 V_{out} &= E - R_L I_c \\
 &= E - R_L h_{FE} (I_{b0} + i_b) \\
 &= (E - R_L h_{FE} I_{b0}) - R_L (h_{FE} i_b). \\
 v_{out} &= -R_L (h_{FE} i_b)
 \end{aligned}$$

v_{in} 大きいほど i_b は大, v_{out} は小 (つまり v_{in} と位相が逆転)。

3.3.2 エミッタ・フォロワ (下図 (a))

- エミッタ共通回路と抵抗の位置が違う。
- 増幅率 $\lesssim 1$, 入力と出力は同相。
- 入力インピーダンス (ベースで見た電圧/電流値) 大きくとれる。

$$\begin{aligned}
 I_e &= (h_{EF} + 1) I_b \\
 &\approx h_{EF} I_b, \\
 V_{in} &= V_{be} + R_L I_e \\
 &\approx h_{EF} R_L I_b. \\
 Z_{in} &= h_{EF} R_L
 \end{aligned}$$

3.3.3 ダーリントン接続 (下図 (b))

- トランジスタをカスケードで接続：大きな増幅率。
- 注：実際のトランジスタの対応電流，電圧内で。

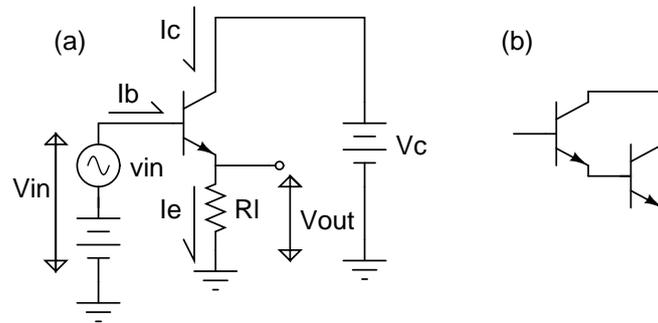


図 20 (a) エミッタフォロワ, (b) ダーリントン接続。

3.4 MOS-FET

※ MOS FET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor)：トランジスタと似た 3 端子素子。

3.4.1 構造と基本動作

- n 型チャンネル MOS(nMOS), p 型チャンネル MOS(pMOS) あり。
- nMOS を例に説明。

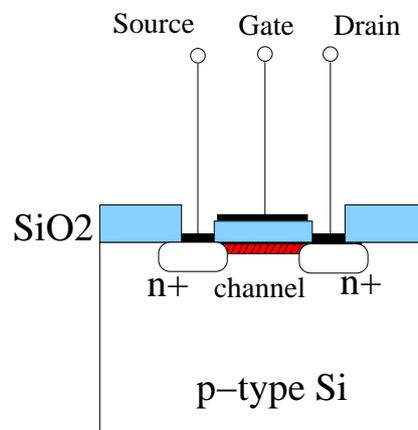


図 21 nMOS の構造

- ソースとドレインの部分：高い濃度でドナー注入，キャリア（電子）密度高。

- ゲート電圧： $V_G > V_T > 0$ (V_T : しきい電圧) → ゲートの部分に少数キャリアの電子集まる (チャンネル or n 型反転層), ソース・ドレイン間で電流が可能に。
- “電界効果 (Field Effect) ”。 V_G によりチャンネルの厚み変化 → 電気伝導度の制御。
※ゲート：MOS 構造, 一種のスイッチ。
- pMOS：nMOS を逆転したもの, $V_G < V_T < 0$ のときスイッチ ON.

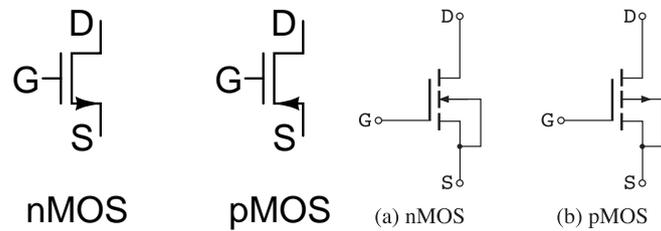


図 22 nMOS, pMOS の回路記号

3.4.2 簡単な回路とトランジスタとの違い

- 下図：npn 型トランジスタを nMOS で置き換え。
 - ドレイン ↔ コレクタ。
 - ゲート ↔ ベース。
 - ソース ↔ エミッタ。
- ゲート電圧の変化 → チャンネルの厚み・抵抗値変化 → 電流, 電圧の変化。

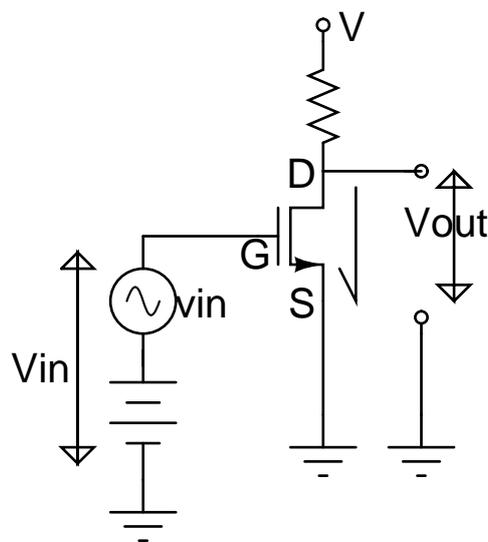


図 23 nMOS を用いた増幅回路例

- トランジスタとの違い：

- 入力側電流なし（バイアス電流に対応するもの）。→ 電力消費（発熱）小（入力インピーダンス大）。
- レスポンスがより早いものを作れる。

4 オペアンプと基本的な回路

4.1 オペアンプとは？

- 増幅回路：トランジスタや FET，抵抗の組み合わせで実現可能。
 - （問題）設計が面倒，実現が手間。

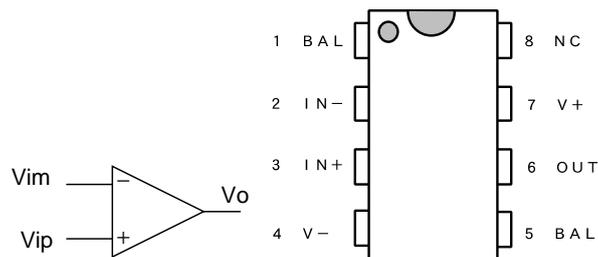


図 24 オペアンプの回路記号と実際のパッケージ (LM741)

- オペアンプ：トランジスタや FET など数十個を組み合わせ集積回路 (IC) 化したもの。
 - 規定電圧を与えるだけで望み通りの動作。
 - オペアンプ：Operational Amplifier (演算増幅器) の略。OP-AMP.
 - 入力口 2 つ（反転入力端子，非反転入力端子），出力 1 つ。
- 基本的な動作：2 入力を V_+ , V_- として，

$$V_o = G(V_+ - V_-). \quad (43)$$

G ：オープンループ・ゲイン (10^5 - 10^6)。

- オペアンプを特徴づける量。
 - 入力インピーダンス (R_i)：無限大が理想。
 - ゲイン (G)：無限大が理想。
 - 出力インピーダンス (R_{out})：ゼロが理想。

※帯域特性：入力周波数によって異なる。使える周波数範囲には制限あり。

※（それ以外の理想的でない振る舞い）信号の歪みや非線形性，オフセット電圧。

4.2 オペアンプを使った基本回路

※オペアンプの応用範囲：非常に広い。ここではごく基本的なもののみ紹介。

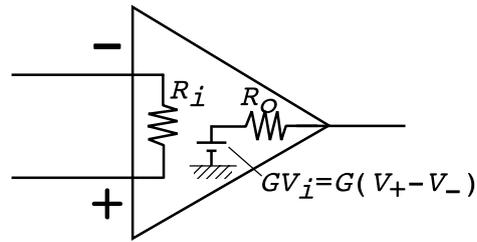


図 25 オペアンプの等価回路。

4.2.1 反転増幅器

- 回路構成：下図のとおり。負帰還 (negative feedback) により，回路の増幅率に G (オープンループゲイン) は現われない。

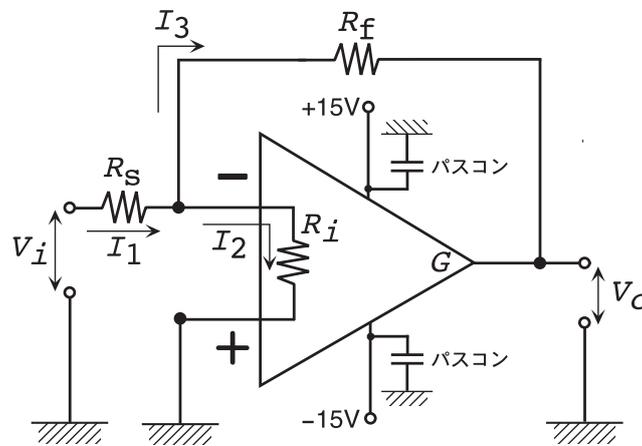


図 26 オペアンプを使った反転増幅器

- - 端子側の電圧 V_- 。

$$\begin{aligned} V_- &= V_i - R_s I_1 \\ &= R_i I_2 \\ &= V_o + R_f I_3. \end{aligned}$$

- 一方，電流同士には

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

- V_- の式を使って I_1, I_2, I_3 を解き，上の式に代入。

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_i - V_-}{R_s} \right) &= \left(\frac{V_-}{R_i} \right) + \left(\frac{V_- - V_o}{R_f} \right) \\ &\approx \left(\frac{V_- - V_o}{R_f} \right). \end{aligned}$$

($R_i \rightarrow \infty$ と見なせる場合)。これを使って V_- を解くと、

$$V_- = \left(\frac{V_i R_f + V_o R_s}{R_f + R_s} \right). \quad (44)$$

- 一方、OP アンプの動作の基本式 (43) に式 (44) を代入、

$$V_o = -GV_- = -G \left(\frac{V_i R_f + V_o R_s}{R_f + R_s} \right).$$

これを V_o について解くと、

$$\begin{aligned} V_o &= -V_i \left(\frac{R_f}{\frac{R_f + R_s}{G} + R_s} \right) \\ &\approx -V_i \left(\frac{R_f}{R_s} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

($G \gg 1$ と見なせる場合)。

- 増幅率に G は現われない。温度・電圧などの変化で G が多少変化しても、回路は安定に動作。
- 式 (44) に式 (45) を代入すると、

$$V_- = 0.$$

“バーチャルショート” という。

4.2.2 非反転増幅器

- その回路構成。feedback をかけ、回路の増幅率は G に依存しない (非反転増幅器の場合と同様)。
- - 端子側の電圧 V_- は、

$$\begin{aligned} V_- &= V_i - R_i I_1 \\ &= R_s I_2 \\ &= V_o - R_f I_3. \end{aligned}$$

- 電流同士の関係は

$$I_2 = I_1 + I_3.$$

- V_- の式を使い、 I_1, I_2, I_3 を解き、上の式に代入。

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_-}{R_s} \right) &= \left(\frac{-V_- + V_i}{R_i} \right) + \left(\frac{V_o - V_-}{R_f} \right) \\ &\approx \left(\frac{V_o - V_-}{R_f} \right). \end{aligned}$$

($R_i \rightarrow \infty$ と見なせる場合)。これを使って V_- を解くと、

$$V_- = \left(\frac{V_o R_s}{R_f + R_s} \right). \quad (46)$$

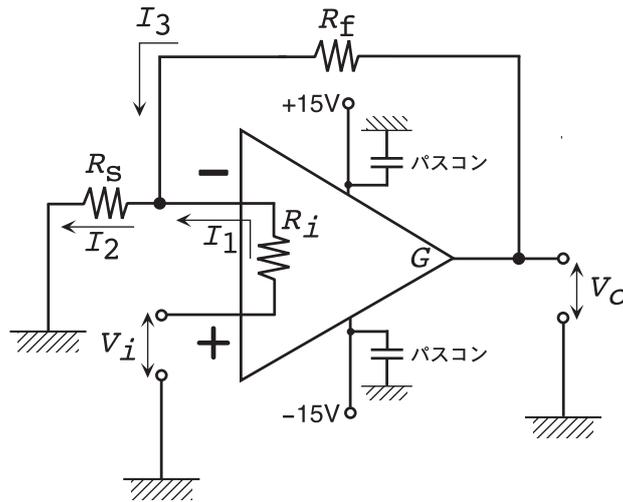


図 27 オペアンプを使った非反転増幅器

- 一方，式 (43) に式 (46) を代入すると，

$$V_o = G(V_i - V_-) = G \left(V_i - \frac{V_o R_s}{R_f + R_s} \right).$$

これを V_i について解くと，

$$V_i = V_o \left(\frac{1}{G} + \frac{R_s}{R_f + R_s} \right).$$

$G \gg 1$ なら，

$$V_o = V_i \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \right). \quad (47)$$

回路の増幅率に G は現われない。

- この場合も，式 (46) に式 (47) を代入すると，バーチャルショート ($V_- = V_i$) が出てくる。

4.2.3 実際のアンプの特性

- 増幅率 (ゲイン)： 電圧 (電流) パワーの比，“デシベル” [dB]：電圧の入出力 V_i と V_o で

$$20 \log \left(\frac{V_o}{V_i} \right). \quad (48)$$

電流の場合も同様。

パワーの比の場合は， P_i と P_o として

$$10 \log \left(\frac{P_o}{P_i} \right). \quad (49)$$

“ x dB のアンプ” と言ったときに，パワー比なのか電圧 (電流) 比なのかを注意。

※複数のアンプをつなぐ場合：ここのアンプのゲインを G_i dB としたとき、合成ゲインは

$$\sum G_i.$$

- 有効帯域幅，雑音：実際のアンプの理想的な振る舞いからのずれ → 入力信号とは関係ない成分の付加，信号波形の歪み。

※ これらは次章で改めて議論。

4.2.4 その他の演算回路

- 反転増幅器の $R_s \rightarrow C$ ：微分回路。
- 反転増幅器の入力と出力の関係：Analytic Signal で入出力を考え，式 (45) の $R_s \rightarrow 1/(j\omega C)$ で置き換えれば良い。

$$\begin{aligned}\tilde{v}_o &= -j\omega CR\tilde{v}_i \\ &= -RC\frac{d\tilde{v}_i}{dt}.\end{aligned}$$

($v_i \propto e^{j\omega t}$ として)。

- 反転増幅器の $R_f \rightarrow C$ ：積分回路。やはり式 (45) の $R_f \rightarrow 1/(j\omega C)$ と置き換えれば，以下のように積分回路で働くことがわかる。

$$\tilde{v}_o = -\frac{1}{CR} \int \tilde{v}_i dt.$$

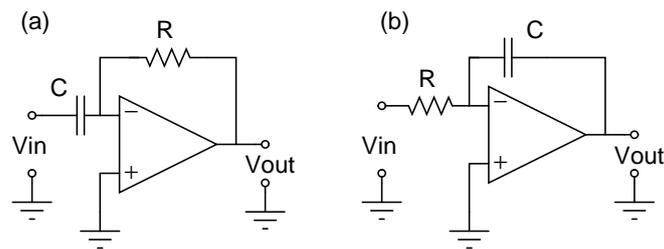


図 28 オペアンプによる微分回路 (a)，積分回路 (b)。

- その他にも色々な応用回路あり。各自で調べる。

5 信号処理と雑音の基礎理論

5.1 フーリエ変換・信号の周波数成分

※ここでは数学的証明は最低限。より厳密な数学的背景は各自調べること。

5.1.1 フーリエ級数

- 任意の周期関数 $x(t)$ (周期 T) は以下のフーリエ級数で表現可能。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \quad (50)$$

但し,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

※ ここで, 関数系

$$1, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

は $[-T/2, T/2]$ で直交関数系であるという。

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)g(t)dt = 0 \text{ if } f \neq g.$$

また, “任意の関数を表現できる” という性質を “完全系である” と呼ぶ。

- 式 (50) は次のようにもかける。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/T}, \quad (51)$$

但し,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt. \quad (52)$$

($c_n^* = c_{-n}$ に注意。)

※ 式 (50) で

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin \theta = \frac{-j}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

を使うと,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{j2\pi nt/T} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-j2\pi nt/T}.$$

但し,

$$A_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt,$$

$$B_n = \frac{a_n + jb_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j2\pi nt/T} dt.$$

これを書き直したのが式 (51), (52)。

5.1.2 フーリエ変換と周波数成分

- $f_n = n/T$, $\delta f = 1/T$ とおき, 式 (51), (52) に代入。ここで $T \rightarrow \infty$ の極限とる。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df, \quad (53)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (54)$$

あるいは, $2\pi f = \omega$, $X(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(f)$ とおく ($X(\omega)d\omega = X(f)2\pi df \equiv X(f)df$ より) と,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (55)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (56)$$

- 式 (54), (56) を $x(t)$ のフーリエ変換と呼び, $X(f), X(\omega)$ をフーリエ成分 (周波数成分) と呼ぶ。
- 式 (53), (55) をフーリエ逆変換と呼ぶ。
- $x(t)$ が実関数の時,

$$X(-f) = X^*(f).$$

独立な情報は $f, \omega \geq 0$ で尽くされている。

- $X(f)$ の意味: $x(t)$ を正弦波に分解したときの複素振幅。負の周波数は, 実信号を表すのに形式的に出てくる成分 (式 (20), (21) と対応, 確かめよ)。
- 主なフーリエ変換の性質
 - 線形性:** $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow aX_1(f) + bX_2(f)$.
 ※単一周波数で考える意味: フーリエ成分に対する応答。
 - 微分・積分** $\dot{x}(t) \rightarrow j\omega X(f)$, $\int x(t) dt \rightarrow \frac{X(f)}{j\omega}$.
 - 相似則:** $x(kt) \rightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$.
 - 推移則:** $x(t - t_0) \rightarrow X(f) e^{-j2\pi ft_0}$.
- フーリエ変換: f (or ω) $\leftrightarrow t$ だけとは限らない。
 - 例: 量子力学の波動関数: $\phi(x) \leftrightarrow \phi(p)$.

5.1.3 エネルギースペクトル・パワースペクトル

- $x(t)$: 不規則変動。波の振幅の 2 乗 \rightarrow エネルギーに対応。
- $|X(f)|^2 = X(f)X^*(f)$: エネルギーのうち周波数 f がもつエネルギーに対応。“エネルギースペクトル”。
- $x(t)$ の区間が無限の場合 : 単位時間あたりのエネルギー = パワーの期待値で定義。具体的には,

$$\begin{aligned}
 P(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right] \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right) \left(\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right). \quad (57)
 \end{aligned}$$

これを“パワースペクトル”と呼ぶ。

- ところで時間領域での平均パワーは

$$\bar{x}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt. \quad (58)$$

周波数 $[f, f + df]$ の成分の \bar{x}^2 の寄与 $= P(f)df$ 。つまり,

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)df = 2 \int_0^{\infty} P(f)df. \quad (59)$$

厳密な証明は後ほど行う。

5.1.4 フーリエ変換の簡単な例

(i) 周期 T の矩形波

$[-T/4, T/4]$ で $x(t) = 1$, 他は 0, 以下繰り返し。

- この場合, フーリエ級数 (式 (51), (52)) で表現できる。
- $n = 0$ のときは,

$$c_n = \frac{1}{2}.$$

- $n \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi nt/T} dt \\
 &= \frac{j}{2\pi n} \left[e^{-j2\pi nt/T} \right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).
 \end{aligned}$$

$m = 1, 2, \dots$ として

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} & (|n| = 2m-1), \\ 0 & (|n| = 2m). \end{cases}$$

- まとめてと,

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[\cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{3} \cos \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \cos \frac{10\pi t}{T} \dots \right].$$

離散的な波の足し合わせ：“線スペクトル”と呼ぶ。

(ii) 幅 T , 高さ K の箱形関数

- この場合は, 式 (54) で $X(f)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} X(f) &= K \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= KT \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right). \end{aligned} \quad (60)$$

- 式 (60) のタイプの関数 ($\sin x/x$): “sinc 関数”と呼ぶ。
- この場合, $X(f)$ は連続的な値をもつ: “連続スペクトル”。
- ※ 有限長の信号: 連続スペクトルになる。
- ※ $T \rightarrow$ 大 のとき, 周波数領域での sinc 関数の幅がシャープに (相似則)。不確定性原理と関係。
- ちなみに, このときエネルギースペクトルは,

$$|X(f)|^2 = (KT)^2 \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2. \quad (61)$$

(iii) 参考: ガウシアン

- 以下のような関数: ガウシアン ($T > 0$)。

$$x(t) = \frac{1}{T\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right)$$

これのフーリエ変換は

$$X(f) = \exp(-\pi^2 T^2 f^2)$$

- $f_{\text{FWHM}} \sim 1/T$.

5.1.5 デルタ関数

- 非常に狭い幅をもったパルス: δ 関数。
- 定義:

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & (\text{if } a \leq 0 \leq b) \\ 0 & (\text{otherwise.}) \end{cases} \quad (62)$$

- 変形：

$$\int_a^b \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} 1 & (\text{if } a \leq t_0 \leq b) \\ 0 & (\text{otherwise.}) \end{cases}$$

※参考： δ 関数の導入の仕方いくつかあり。例えば，式 (61) で $KT = 1$ を保ったまま $T \rightarrow 0$ の極限は

$$(KT)^2 \left(\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right)^2 \rightarrow \delta(f).$$

- 重要な性質：

– 任意の関数 $f(t)$ に対し，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0). \quad (63)$$

式 (62) で $t \approx 0$ の近辺でのみ $\delta(t)$ 値を持つと考えれば分かりやすい。

– $\delta(t)$ 自身のフーリエ変換：式 (63) より，

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1, \\ \Delta(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

δ 関数のフーリエ変換は定数！ 逆フーリエ変換を考えると，

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (64)$$

δ 関数の別の重要な表現。

- (応用例) 無限に続く正弦波 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ のフーリエ変換は？

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

なので，

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_0 + \omega)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega - \omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega + \omega_0)t} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \end{aligned} \quad (65)$$

2行目から3行目は $t \rightarrow -t$ の変数変換を，最後は式 (64) を使った (但し，式 (64) で $\omega \leftrightarrow t$ としたもの)。

※もともと単一周波数だったのだから，フーリエ成分が δ 関数になるのは明らか。

5.2 線形系の記述と周波数応答

5.2.1 線形系とは？

- 入力 $x(t)$ に対して出力 $y(t)$ が得られるとして、以下の重ね合わせの原理が成立する時“線形系”と呼ぶ。

$$\begin{aligned} &\text{もし, } x_1 \rightarrow y_1, \quad x_2 \rightarrow y_2 \text{ に対し} \\ &ax_1 + bx_2 \rightarrow ay_1 + by_2. \end{aligned}$$

- 非線形な場合でも、 $x_0(\rightarrow)y_0$ の近傍からの微小ずれ $(\delta x, \delta y)$ は線形系として扱える場合が多い。
- 簡単な例：RC 積分器（すでに第 1 章で類似例やった）

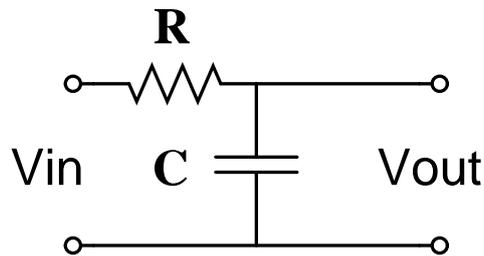


図 29 RC 積分器

流れる電流を I として、 $V_{in} = x$, $V_{out} = y$ とおくと、

$$\begin{aligned} I &= \frac{x - y}{R} \\ y &= \frac{1}{C} \int I dt, \end{aligned}$$

より、

$$RC \frac{dy}{dt} + y = x. \quad (66)$$

これは x, y の間で重ね合わせの原理が成り立ち、線形系である。

5.2.2 周波数応答とフィルタ

- 線形系：入力信号 $x(t)$ はフーリエ成分の線形結合 (or 積分) $\rightarrow y(t)$ を得るには各フーリエ成分に対する応答 (“周波数応答”) を調べ、それを線形結合すれば良い。
- 定義： $x(t), y(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega), Y(\omega)$ とした時、

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \quad (67)$$

- 物理的なシステム $x(t), y(t)$ は実, $X(-\omega) = X(\omega)^*, Y(-\omega) = Y(\omega)^* \rightarrow H(-\omega) = H(\omega)^*$.
- $H(\omega)$ の具体的意味: 角周波数 ω_0 の単色波 (式 (20), (21) 参照)

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{j\omega_0 t} + a^* e^{-j\omega_0 t} \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0). \\ (a &= \frac{A_0}{2} e^{j\theta_0}) \end{aligned}$$

に対するレスポンスは?

- $x(t)$ のフーリエ変換は,

$$X(\omega) = a\delta(\omega - \omega_0) + a^*\delta(\omega + \omega_0).$$

- 一方, その応答 $y(t)$ は,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ (\text{ここで } X(\omega) \text{ に対する上式を使うと}) \\ &= aH(\omega_0) e^{j\omega_0 t} + a^* H(-\omega_0) e^{-j\omega_0 t} \\ &= 2\Re(aH(\omega_0) e^{j\omega_0 t}). \end{aligned}$$

つまり, 振幅が $|H(\omega_0)|$ 倍, 位相が $\arg H(\omega_0)$ 倍進む (複素振幅のかけ算)。

- 例: 先ほどの積分器: 式 (66) で両辺をフーリエ変換すると,

$$(j\omega RC + 1)Y(\omega) = X(\omega).$$

よって

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{j\omega RC + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega\tau}. \end{aligned} \tag{68}$$

但し, $RC = \tau$ とおいた。

- 式 (68) を振幅と位相で書くと

$$\begin{cases} |H(\omega)| &= (1 + \omega^2\tau^2)^{-1/2} \\ \arg H(\omega) &= -\arctan(\omega\tau). \end{cases} \tag{69}$$

高い周波数では振幅が落ちる。このようなフィルタを “Low-pass filter” と呼ぶ。

- “High-pass filter”, “Bandpass filter” 説明。
- 下のような回路の周波数応答関数を求め, これが High-pass Filter の役割を果たすことを示せ。

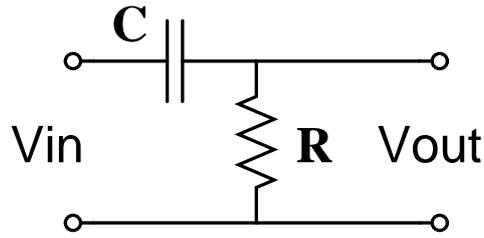


図 30 CR 回路

- ボーデ図： $H(\omega)$ を $|H(\omega)|, \arg H(\omega)$ で表す。 $|H(\omega)|$ は通常デシベル（式 (48), (49) 参照）で表す。
- 周波数応答 $H_1(\omega), H_2(\omega)$ をもつデバイスを直列につないだ場合：

$$\text{Gain} = H_1 H_2 \text{ (デシベルだと足し算)}$$

$$\text{Phase} = \arg H_1 + \arg H_2$$

5.2.3 インパルス応答とたたみこみ

※周波数応答の別の見方：インパルス応答のフーリエ変換

- $x(t) = \delta(t)$ を入れた時の応答 $y(t)$ ：“インパルス応答”と呼ぶ ($h(t)$)。
 (因果律より, $h(t)$ は $t \geq 0$ でのみ意味がある。そこで $h(t) = 0$ ($t < 0$) とおく。)
 ※任意の入力 $x(t)$ に対する応答 $y(t)$ は $h(t)$ を使ってどうかける？
- もっとも基本的な例：ステップ応答

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

のとき,

$$y(t) = \int_0^t h(t-s) ds \quad (t \geq 0). \quad (70)$$

- 一般化：任意入力 $x(t)$ にたいしては, 式 (70) を $x(t)$ で重みをかけるように変形。

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(s) h(t-s) ds.$$

しかし, $h(t) = 0$ ($t < 0$) なので, 積分範囲を以下のように変えてよい。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds. \quad (71)$$

($s < t$ の範囲しか積分に寄与しない。)

- 式 (71) の形の積分：たたみこみ (重畳積分 or Convolution) と呼び, 以下のように表記。

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- 実は $h(t)$ は周波数応答関数 $H(\omega)$ と密接に関係：

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(t-s) ds \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= (*) \end{aligned}$$

ここで $t-s=\tau$ とおくと,

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(s) h(\tau) ds \right] e^{-j\omega(\tau+s)} d\tau \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{-j\omega s} ds \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) \\ &\equiv X(\omega) H(\omega). \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$h(t)$ と $H(\omega)$ とは、お互いにフーリエ変換の関係（係数がフーリエ変換の定義と違うが）。

※ 回路の安定性や過渡特性の解析で重要な関係。

- 重要な性質：たたみこみのフーリエ変換は個々のフーリエ変換の積：

$$\begin{aligned} z(t) = x(t) * y(t) &\longrightarrow Z(\omega) = 2\pi X(\omega) Y(\omega) \\ &\text{or. } Z(f) = X(f) Y(f) \end{aligned} \tag{72}$$

5.3 ランダム信号（雑音）の記述

5.3.1 ランダム信号（雑音）とは？

- 自然界の信号：“正弦波”や“矩形波”など、規則的なものだけでない。
- ランダム信号（雑音）：不規則な変動をする信号のこと。
 - 音楽やラジオ・携帯電話等の通信信号：規則だった信号。
 - 自然界の信号（天体からの電波信号）：ランダム信号
 - 増幅器の熱雑音：ランダム信号（注：系統的な誤差の要因とは別）。
- 雑音の性質の記述：統計量で。
 - 平均値，分散，確率密度関数。
 - パワースペクトル，自己相関関数（これからやる）。 etc.
- “平均”を取る場合，以下の2種類の概念がある。
 - 集合平均（アンサンブル平均 $\langle x \rangle$ ）：信号の値からなる集合を対象にした平均値。

- 時間平均 (\bar{x}): ある時間内での平均
- 時間平均が時刻によらず一定: “定常” と呼ぶ。
- 定常信号で $\langle x \rangle = \bar{x}$ のとき, “エルゴード信号” と呼ぶ。
※多くの定常ランダム信号は, エルゴード性が成立すると信じられている。

5.3.2 自己相関関数

- 定義は以下の通り。

$$\begin{aligned}
 C(\tau) &\equiv \langle x(t)x(t-\tau) \rangle \quad (\text{アンサンブル平均}) \\
 &= \overline{x(t)x(t-\tau)} \quad (\text{エルゴード信号の場合}) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau) dt \quad (73)
 \end{aligned}$$

※ランダム信号を特徴づける量として特に重要。

- 自己相関係数 (規格化された自己相関関数)

$$R(\tau) = C(\tau)/C(0). \quad (74)$$

- $-1 \leq R(\tau) \leq 1$ 。
- 意味: $x(t)$ とそれから τ だけ遅れた $x(t-\tau)$ の信号とがどの程度関連性あるかを示すもの。
- 白色雑音: $R(\tau) = \delta(\tau)$ ($\tau = 0$ 以外, 相関性全くない信号)。

- 式 (73) は $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$C(\tau) = x(t) * x(-t)$$

の格好になっている。

- すると式 (72) より $C(\tau)$ のフーリエ変換は式 (57) で定義したパワースペクトル $P(f)$ ($x(t) \leftrightarrow X(f)$, $x(-t) \leftrightarrow X(f)^*$)。
- ウィーナー・キンチンの定理

$$P(f) \leftrightarrow C(\tau) \quad (\text{フーリエ変換対}). \quad (75)$$

※白色雑音: $P(f) = \text{const.}$ 全ての周波数成分が等しく混ざったもの。

※式 (75) で $C(\tau)$ のフーリエ変換に $\tau = 0$ を代入すると, 式 (59)

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df = 2 \int_0^{\infty} P(f) df$$

が導ける。

5.3.3 補遺：ウィーナー・キンチンの定理の厳密な証明（プリント配布）

- $x(t)$ がエルゴード信号の場合、自己相関関数（式 (73)）を変形。

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & (|t| \leq T/2) \\ 0 & (|t| > T/2) \end{cases}$$

として、

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)x_T(t-\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(f)e^{j2\pi ft}df \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f')e^{j2\pi f'(t-\tau)}df' \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(f)e^{j2\pi ft}df \int_{-\infty}^{\infty} X_T^*(f')e^{-j2\pi f'(t-\tau)}df' \right] dt \end{aligned}$$

- ここで t に関する積分を先に行うと、 δ 関数の表記式 (64)

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}df \left(= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega \right)$$

を参考にして、

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(f)X_T^*(f')\delta(f-f')e^{j2\pi f'\tau}dfdf' \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}df = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} \right) e^{j2\pi f\tau}df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f)e^{j2\pi f\tau}df. \end{aligned}$$

これで、式 (75) の関係が証明された。

- 式 (75) で $\tau = 0$ とおくと、

$$C(0) = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)df = 2 \int_0^{\infty} P(f)df$$

で、式 (59) で紹介した式。これは、“時間領域でのパワーの期待値は、パワースペクトルを全ての周波数で足し上げたものに等しい” という意味に他ならない。

5.4 実際の回路例

5.4.1 増幅器（アンプ）の働きと雑音

- 入力信号のうち、 $[f_0, f_0 + df]$ の成分考える。
- 単体のアンプの周波数応答 $H(f_0) = G$ （実数）とおく。 G ：ゲインと呼ぶ。

- 理想のアンプ：入出力パワースペクトルを $P_{in}(f_0), P_{out}(f_0)$ として,

$$P_{out}(f_0) = GP_{in}(f_0).$$

(以下, $P_{in}(f_0) \rightarrow P_{in}$ などと表記)

- 実際：必ずノイズを付加する。

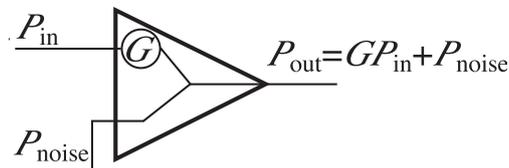


図 31 現実的なアンプ動作

- アンプの性能：入力に対してどの程度のノイズが付加されるのか？

$$\begin{aligned} P_{out} &= (GP_{in} + P_N) \\ &= G \left(P_{in} + \frac{P_N}{G} \right). \end{aligned}$$

つまり, P_N/G が小さいほど良いアンプ。

- 周波数 f_0 におけるアンプの“雑音温度”： (T_N)

$$kT_N \equiv \frac{P_N}{G}. \quad (76)$$

で定義。

※温度 T の抵抗の両端で得られる電圧揺らぎの最大パワースペクトルが kT であることに由来。

- 複数のアンプを接続した場合は？ 例えば2個ならば,

$$\begin{aligned} P_{out} &= G^{(2)} \left[\left(G^{(1)} P_{in} + P_N^{(1)} \right) + \frac{P_N^{(2)}}{G^{(2)}} \right] \\ &= G^{(1)} G^{(2)} \left(P_{in} + \frac{P_N^{(1)}}{G^{(1)}} + \frac{P_N^{(2)}}{G^{(1)} G^{(2)}} \right). \end{aligned}$$

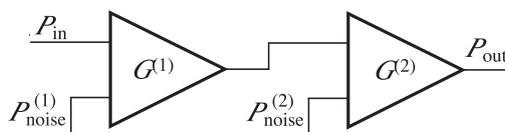


図 32 アンプの連結

- n 個アンプを接続したときは,

$$P_{out} = G^{(1)} \dots G^{(n)} \left(P_{in} + \sum_{k=1}^n \frac{P_N^{(k)}}{G^{(1)} \dots G^{(k)}} \right).$$

- これを式 (76) の雑音温度で書くと,

$$P_{out} = G^{(1)} \dots G^{(n)} \left[P_{in} + k \left(T_N^{(1)} + \frac{T_N^{(2)}}{G^{(1)}} + \dots \right) \right].$$

- 正味のゲインは各アンプのゲインの積。

また, 正味の雑音温度=システム雑音温度: T_{sys}

$$T_{sys} = T_N^{(1)} + \frac{T_N^{(2)}}{G^{(1)}} + \dots$$

もし, $G^{(1)} \gg 1$ なら, 初段のアンプ性能がもっとも重要なことがわかる。

5.4.2 ヘテロダイン受信方式

- 入力信号の周波数を異なる周波数 (通常より低い周波数) に変換して受信する方式。
- 興味にある周波数成分に近い正弦波発振源 (局部発振機=LO) の信号を混ぜ, “うなり” をとってやる。

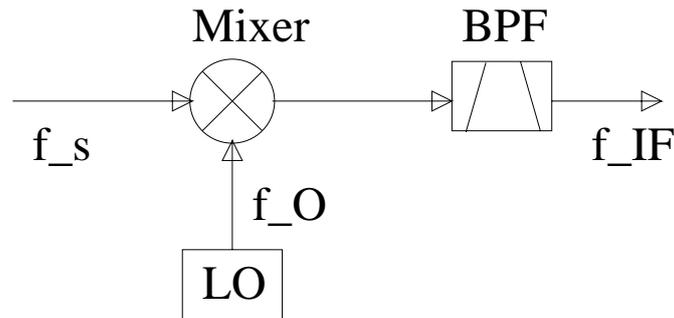


図 33 ヘテロダイン受信

- “うなり” の周波数: 中間周波数 (IF)。
 ※ IF 帯の回路を変えず, LO 周波数を変えるだけで受信周波数を変えられる。無線受信 (e.g., テレビやラジオ, 電波天文など) の標準的形態。
- 具体的な周波数変換の記述: LO 信号 $g(t)$

$$g(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{-j\omega_0 t} + e^{j\omega_0 t}), \quad \omega_0 > 0$$

式 (65) よりこのフーリエ変換は,

$$G(\omega) = \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (77)$$

- 入力信号を $s(t)$, ミキシングの操作は $s(t)g(t)$ 。その結果でてくる IF 信号のフーリエ成分 $S_{\text{IF}}(\omega_{\text{IF}})$ は, 式 (77) も用い,

$$\begin{aligned} S_{\text{IF}}(\omega_{\text{IF}}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega')G(\omega - \omega')d\omega' \\ &= \frac{S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)}{2}. \end{aligned} \quad (78)$$

- 式 (78) より, ある ω_{IF} では信号周波数 $\omega_s > 0$ として

$$\begin{aligned} \omega_{\text{IF}} \pm \omega_0 &= \omega_s \\ \omega_{\text{IF}} \pm \omega_0 &= -\omega_s \end{aligned}$$

を満たす ω_s が重なっている。

- もう少し分かりやすく, 場合わけ。

(i) $\omega_{\text{IF}} = \pm(\omega_s + \omega_0)$ の領域 これらはアップコンされた高周波成分, 通常は BPF(LPF) で除去。

(ii) $\omega_{\text{IF}} = \pm(\omega_s - \omega_0)$ かつ $\omega_{\text{IF}} > 0$ の領域 信号の USB, LSB 周波数成分を

$$\begin{aligned} \omega_s^{(u)} &= \omega_0 + \omega_{\text{IF}} > 0 \\ \omega_s^{(l)} &= \omega_0 - \omega_{\text{IF}} > 0 \end{aligned} \quad (79)$$

と定義。式 (78) より出てくる周波数成分は,

$$S(-\omega_s^{(l)}) + S(\omega_s^{(u)}) \quad (80)$$

に比例。つまり, USB 側はそのまま, LSB 側が複素共役の形で IF に移動。

(iii) $\omega_{\text{IF}} = \pm(\omega_s - \omega_0)$ かつ $\omega_{\text{IF}} < 0$ の領域 USB, LSB の RF 周波数成分を

$$\begin{aligned} \omega_s^{(u)} &= \omega_0 - \omega_{\text{IF}} > 0 \\ \omega_s^{(l)} &= \omega_0 + \omega_{\text{IF}} > 0 \end{aligned}$$

として, 式 (78) より出てくる周波数成分は,

$$S(-\omega_s^{(u)}) + S(\omega_s^{(l)})$$

に比例。やはり USB 側はそのまま, LSB 側が複素共役の形で IF に移動。(単純に, $\omega_{\text{IF}} > 0$ の場合の複素共役)。

- USB/LSB を重ねて受信: DSB(Double Sideband) 受信。
- 両者を分離したい場合: LO に位相オフセット ($\pi/2$) を入れ (変調), IF 信号に j をかける or $\pi/2$ 位相を回す (復調) と, 式 (80) の出力が以下のように変わる。

$$-S(-\omega_s^{(l)}) + S(\omega_s^{(u)}) \quad (81)$$

- よって, 変復調をかけた場合 (式 (81)) とかけない場合 (式 (80)) とを足し引きすれば, USB/LSB 分離可能 (サイドバンド分離)。

5.4.3 位相弁別検出器 (PSD) とロックインアンプ

- 検出したい信号の周波数 (ω_s) : 非常に狭い場合。
- バンドパスフィルター : 帯域を狭くするには限界あり。
- 解決法 : ヘテロダイン受信法を応用。検出したい信号の周波数と同じ周波数を入れ, DC 成分だけを取り出す。
- 実際の回路 : 周波数ドリフトなどを防ぐため, 位相弁別検出器 (PSD) を使用。
 1. 入力信号を 2 つに分け, 一方の符号を反転させる。
 2. 信号と同じ周波数を持つ矩形波を参照信号に, その正負で測定信号をスイッチングしながら出力 (位相弁別検出器)。
 3. Low-pass filtering すれば振幅に比例した DC 成分が得られる。これらをひとまとまりでパッケージ化したものをロックイン・アンプと呼ぶ。

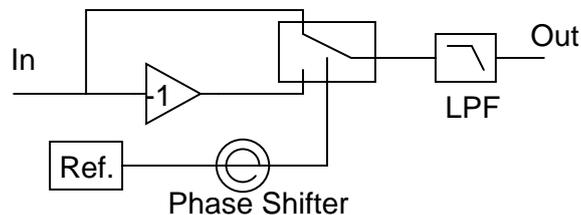


図 34 ロックイン・アンプの概念図

- 実際は入力信号と参照信号の位相を 0 に調整する必要あり。そのための位相シフタが必要。