

修士学位論文

茨城 32m 電波望遠鏡受信機
切り替え用導波管の開発

2016 年度
(平成 28 年度)

茨城大学理工学研究科

理学専攻

15NM151T
足立弘

論文要旨

茨城 32m 電波望遠鏡とは、茨城県日立市と高萩市にまたがり位置する 2 基の電波望遠鏡の総称である。メタノールメーザーを含む 6-9GHz 帯、および水メーザー・アンモニア分子輝線を含む 22GHz 帯の受信を行うことができる。これらの観測・解析は星形成メカニズム解明のために大変重要である。しかし現在この 2 つの帯域の切り替えには受信機の載せ換え作業が必要である。載せ換えには、前準備や搭載後の受信機冷却を含めて約 3 日、4 人以上の人員が必要である。このように受信機の載せ換えには多くの時間と労力がとられるためその間の観測時間を失うことになる。受信機の切り替えを容易に行える導波管の開発が本研究の目的である。

切り替えを容易に行うには約 10m の長い導波管が必要である。本稿における目標は 10m での入力損失を -0.45dB 以上、反射損失を -30dB 以下とする。

切り替え用導波管候補の一つとして円形導波管の入力・反射損失の解析を電磁界解析ソフト HFSS を用いて行った。受信機電波入力部は円形で直径は 6-9GHz 帯が 32mm、22GHz 帯が 9.3mm である。直径 60mm、長さ 1000mm の円形導波管に 6-9GHz 帯、22GHz 帯を入力する解析を行った。モデルの長さは解析時間短縮のために 1000mm とした。解析の結果、 TE_{11} モードの 6.7GHz で入力損失が約 -0.015dB 、反射損失が約 -98dB 、22GHz で入力損失が約 -0.018dB 、反射損失が約 -39dB という結果がそれぞれ得られた。長さ 10m での入力損失を推定してみると 6.7GHz では -0.15dB 、22GHz では -0.18dB となる。これらは目標値を満たす。しかし TE_{11} モード以外の高次モードも伝送される結果となった。高次モードが伝送されることによる影響は実際に試作機を作成して確認する必要があると思われる。

次にもう一つの切り替え用導波管候補として、長距離でも低損失が期待できる円形コルゲート導波管の解析を行った。円形コルゲート導波管の基本モードは HE_{11} のため、正しく解析を行うには TE_{11} から HE_{11} へのモード変換器を円形コルゲート導波管の入出力部に取り付ける必要がある。直径 32mm、全長 634.43mm のモード変換器付き円形コルゲート導波管の解析結果は、6.7GHz で入力損失が -0.071dB 、反射損失は $-40\text{dB} - -35\text{dB}$ 、22GHz 帯の入力損失が -0.294dB 、反射損失は $-30\text{dB} - -20\text{dB}$ となった。これらの結果は直径 60mm、長さ 1000mm の円形導波管の結果よりも悪い結果となった。円形コルゲート導波管の低損失を実現するには、 $a \gg \lambda$ 、 $d \approx \lambda/4$ 、 $p \approx \lambda/3$ 、 $w < p/2$ という条件が必要である。しかし円形コルゲート導波管の半径 $a = 16\text{mm}$ 、波長 $\lambda = 13.6\text{mm}$ (22GHz) が $a \gg \lambda$ を満たすとは言い難い。直径を大きくすることで損失を抑えられると考えられる。また他のパラメータ、 d :溝の深さ、 p :溝の間隔、 w :溝の幅の最適化は行われていない。実用に耐える設計には、さらにこれらの最適化を行う必要があると考えられる。

今後の課題として、良い結果が得られた直径 60mm、長さ 1000mm の円形導波管に関しては試作機を作成し、高次モードが伝送されることによる影響を検証が必要だと思われる。また、円形コルゲート導波管についてはパラメータの最適化を行う必要があると考える。

目次

論文要旨	1
1 イントロダクション	6
1.1 電波天文学	6
1.2 茨城 32m 電波望遠鏡	6
1.3 本研究の目的	8
2 円形導波管の解析 I	10
2.1 解析設定	10
2.2 解析結果	12
2.3 再解析	14
2.4 考察	15
2.5 今後の設計方針	17
3 円形導波管の解析 II	18
3.1 解析設定	18
3.2 解析結果	20
3.3 考察	21
4 円形コルゲート導波管の解析 I	24
4.1 解析設定	24
4.2 解析結果	26
4.3 考察	27
5 円形コルゲート導波管の解析 II	30
5.1 解析設定	30
5.2 解析結果	32
5.3 考察	33
6 まとめ	36
6.1 本研究の結果	36
6.2 今後の課題	36

付録 A	S パラメータと入力損失・反射損失	38
A.1	S パラメータ	38
A.2	入力損失・反射損失	39
付録 B	円形導波管内における電磁波の伝播	42
B.1	円筒座標系	42
B.2	Maxwell 方程式	43
B.3	円形導波管内の電磁場	44
B.4	Cutoff 周波数	49
B.5	管内波長	51
参考文献		53

1 イントロダクション

1.1 電波天文学

電磁波はその波長によって、 γ 線、X 線、紫外線、可視光線、赤外線、電波と名称がついている。宇宙から伝搬する電磁波のほとんどが大気によって吸収されてしまうが、可視光、電波はあまり吸収されることなく地上に到達する。このため天文学は大昔から可視光で観測されてきた。しかし、天体は可視光線だけでなく電波など様々な波長の電磁波を放出しており、図 1 のように可視光は電磁波うちのごくわずかにすぎない。宇宙から到来する電

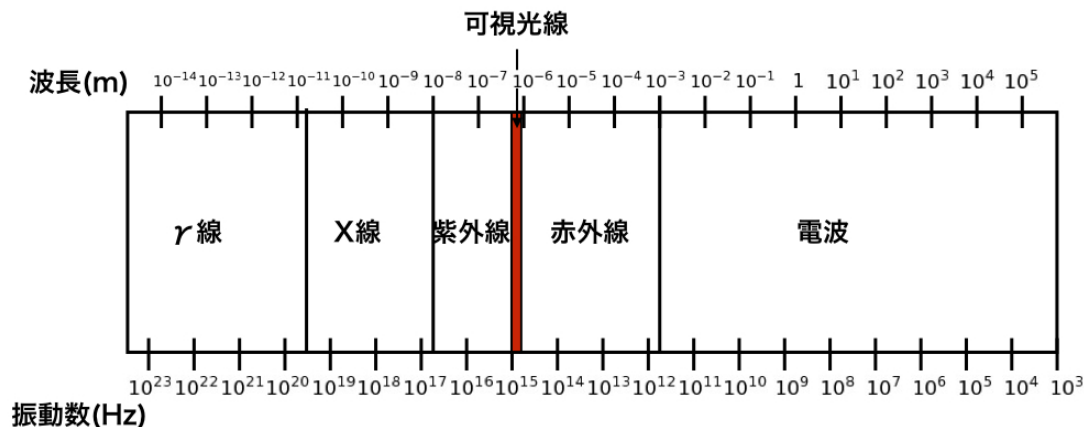


図 1 波長ごとの電磁波の名称 [1]

波を観測し、天体の形成過程等を研究する学問が電波天文学である。

1.2 茨城 32m 電波望遠鏡

茨城 32m 電波望遠鏡 (以下、茨城局) とは、茨城県日立市と高萩市にまたがり位置する口径 32m の 2 基の電波望遠鏡の総称である。日立市側の望遠鏡を日立局、高萩市側を高萩局などと呼称することもしばしばある。図 2 に日立局を掲載する。元は KDDI 株式会社が衛星通信に運用していたが、2007 年にその役目を終え、2009 年に国立天文台に譲渡され電波望遠鏡に改造された。現在は茨城大学宇宙科学教育研究センターを中心に運用されている。

茨城局ではこれまでの開発により、大質量星形成領域のみに付随することが分かっている 6.7GHz メタノールメーザーを含む 6-9GHz 帯 [3]、および星形成領域や活動銀河核などに付随することが分かっている水メーザー・アンモニア分子輝線を含む 22GHz 帯 [4]

の受信を行う能力が備えられてきた。6-9GHz 帯および 22GHz 帯の観測・解析は星形成メカニズム解明のために大変重要である。

1.2.1 受信機載せ換え

これら 2 つの帯域の観測のために、それぞれ別の受信機が用意されている。しかし §1.2.2 で示すように設置スペースに限りがあるため、その切り替えには受信機の載せ替え作業が必要である。受信機の載せ換えは、搭載されている受信機の冷却を停止する前準備、受信機の載せ換え作業、載せ換え後の受信機冷却からなり最大で 3 日程度かかってしまう。また受信機は精密なため慎重に取り扱わなければならないが、重い (約 60kg) ため載せ換え作業人員は最低でも 4 人程度必要である。このように、受信機の載せ換えには多くの時間がとられ、結果としてその間の観測時間を失うことになる。

1.2.2 受信機設置状況と改善案

現在、受信機は巻取室のフィードホーン真下に設置されている。その状況を模式的に表したのが図 3 である。このスペースは受信機を 2 台設置するには狭く困難である。そのため受信機を巻取室真下の観測室に設置することで受信機の切り替えが容易に行えるようにしたい。そのためにはフィードホーンから受信機まで伸びる長さ約 10m の長い導波管が必要である (図 4)。



図 2 茨城 32m 電波望遠鏡の日立局。赤枠が巻取室、緑枠が観測室をそれぞれ表す。

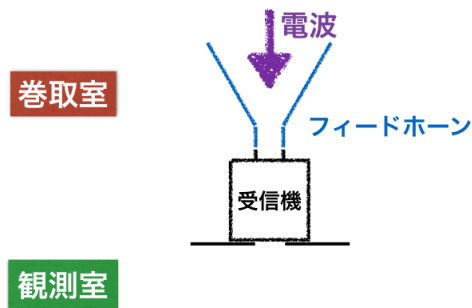


図3 茨城局における受信機の設置状況の模式図。フィードホーン真下に設置されている

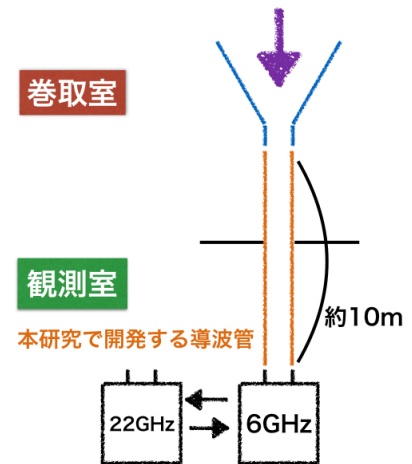


図4 切り替え用導波管導入後の受信機設置状況 (構想図)。観測室に受信機を設置する。

1.3 本研究の目的

本研究は2つの受信機の切り替えを容易に行うための導波管の開発が目的である。この導波管に要求される仕様を確認する。導入されている受信機の電波入力部は円形のため[3][4]、導波管形状は円形とする。巻取室のフィードホーンから観測室までは約10mなので、長さは10mとする。また電波天文学では一般に、入力損失は0dBに近い値、反射損失は -20dB 以下の値が要求される[2]。入力損失(insertion loss)とは入力した電波強度に対して導波管を通過した電波強度がどの程度かを示す値で、通常はdB(デシベル)で表せる。強度が10%減少して90%になる場合の入力損失は約 -0.45dB であり、電波天文学ではこれよりも良い性能が求められる。そのため入力損失の目標を $-0.45\text{dB}(-0.045\text{dB/m})$ 以上とする。反射損失(return loss)は導波管の入出力ポートの反射率を示しこちらもdBで表せる。反射損失が大きいと入力強度に対して反射強度の割合が大きくなり、出力強度が反射された分小さくなってしまう。加工誤差で周波数特性がずれてしまうことにより反射損失が -20dB 以上劣化しないように、設計時の反射損失の目標は -30dB 以下とする。表1に目標性能をまとめる。

表 1 要求仕様及び目標性能

受信機接続部形状	6-9GHz 帯受信機	円形 (直径 32mm)
	22GHz 帯受信機	円形 (直径 9.3mm)
長さ	10m	
入力損失	-0.45dB 以上	(-0.045dB/m 以上)
反射損失	-30dB 以下	

2 円形導波管の解析 I

切り替え用の導波管の候補の一つとして最も単純な構造である円形導波管の入力損失・反射損失の解析を Ansys 社の 3 次元電磁界解析ソフト HFSS(High Frequency Structure Simulator) を用いて行った。HFSS は有限要素法 (finite element method) を用いた数値解析で、全ての電磁波の振る舞いを記述するマクスウェル方程式を計算するソフトである。シミュレーション結果は S パラメータ (散乱行列;scattering parameter) (付録 A 参照) で確認する。

2.1 解析設定

現在使用している受信機の電波入力部の直径は、6-9GHz 帯では 32mm[3]、22GHz 帯では 9.3mm[4] である。そこで、6-9GHz 帯に対しては長さ 1000mm、直径 32mm の円形導波管モデル (circular model 1) を、22GHz 帯に対しては長さ 1000mm、直径 9.3mm の円形導波管モデル (circular model 2) を作成した。モデルの直径はそれぞれの受信機の電波入力部に合わせ、モデルの長さは解析時間の短縮のため 1m とした。解析の諸設定は表 2 の通りである。各設定パラメータについて解説する。

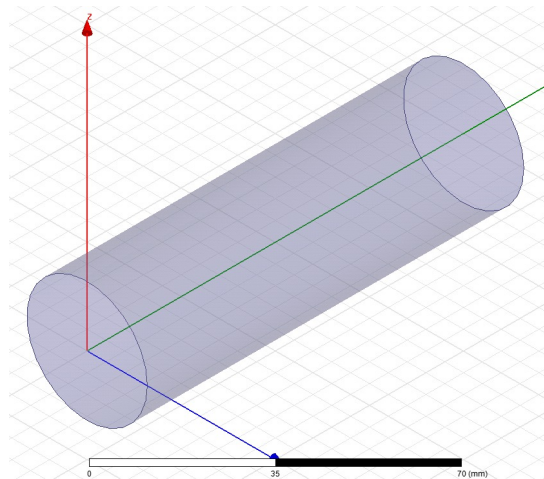


図 5 図は直径 32mm、長さ 100mm の円形導波管解析モデルである。

表 2 circular model 1、2 の解析設定

Set up	circular model 1	circular model 2
直径	32mm	9.3mm
長さ	1000mm	1000mm
Solution freq.	6.7GHz	22GHz
Max Delta S	0.02	0.02
Max no. of passes	6	6
Freq. range	4-10(0.1)GHz	18-26(0.1)GHz
Sweep type	Interpolating	Interpolating
Num. of modes	2	2
Boundaries	Aluminum	Aluminum

2.1.1 Solution frequency

導波管に入力する周波数を設定し、解析モデル内に自動的にこの周波数に適したメッシュを生成する。

2.1.2 Max Delta S

収束しているかどうかを判断する要素である。HFSS では被解析物を有限の要素 (メッシュ) に分割し、S パラメータの算出を行う。しかしメッシュを切る回数が 1 回だけでは算出された S パラメータが妥当であるかどうかはわからない。そのため HFSS ではメッシュ数を増加させながら S パラメータを算出する。解析を繰り返すことでモデルに最適なメッシュを生成する。このメッシュの自動生成を Adaptive auto mesh という。N 回目のメッシュを切った場合の S パラメータ S^N と N-1 回目の場合の S パラメータ S^{N-1} を比較し、その差が Max delta S で設定した値以内に収まるまでメッシュを切り直す。今回はデフォルトの値を用いた。

2.1.3 Maximum number of passes

メッシュを切る最大回数を指定するパラメータである。Max delta S の値に達成していても、max no. of passes で設定した値になった時点で解析を終了する。なおこちらでもデフォルトの値を設定した。

2.1.4 Sweep type

HFSS では Solution frequency を設定しさえすれば解析は行われるが、設定した周波数のみの解析となる。しかし実際の解析の場合はある周波数範囲での導波管の入力・反射損失を知りたい場合が多い。この周波数範囲にわたる解析を行うのが Sweep 解析である。この Sweep 解析では Adaptive auto mesh で生成されたメッシュを利用して他の周波数を解析する。HFSS では 3 つの Sweep type (Discrete、Fast、Interpolating) が用意されており今回はデフォルトの Interpolating とした。

2.1.5 Frequency range

解析周波数の範囲であり、括弧内は何 GHz ごとに解析するかを表す。表 2 の circular model 1 を例にとると 4GHz から 10GHz の 0.1GHz 刻みで解析するという意味になる。

2.1.6 Number of modes

解析するモードの数である。円形導波管では最低でも 2 つのモードを設定しなければならない。

2.1.7 Boundary

解析モデルの境界条件を指定する。設定をしない場合モデル表面は完全導体 (Perfect conductor) となる。本解析では導波管としてよく用いられるアルミニウムを設定した。

2.2 解析結果

図 6-図 9 に、円形導波管の基本モードである TE_{11} の入力損失 (S_{21}) と反射損失 (S_{11}) の解析結果を示す。circular model 1 の 6.7GHz で入力損失が約 -0.077dB 、反射損失が約 -55.07dB 、circular model 2 の 22GHz での入力損失が約 -0.575dB 、反射損失が約 -47.05dB 、という解析結果が得られた。図 6 の 8-10GHz において、入力損失の周波数依存性に不規則な増減が見られた。この結果が妥当であるかどうかを検証するために解析の見直しを行った。

HFSS では解析の際に解析周波数 (Solution Frequency) を設定するが、この設定により解析モデルの要素の大きさが決定される。精度よく解析を行うために、解析周波数は解析における最高周波数を設定する必要がある。今回は解析周波数を circular model 1 に対しては 6.7GHz、circular model 2 に対しては 22GHz を設定した。これらは我々が

観測を行っている周波数であるためこれらを解析周波数として選んだ。しかし今回の解析における最高周波数は circular model 1 は 10GHz、circular model 2 は 26GHz である。解析周波数の設定が適切でなかったため結果に不規則な増減が現れてしまったと考えられる。

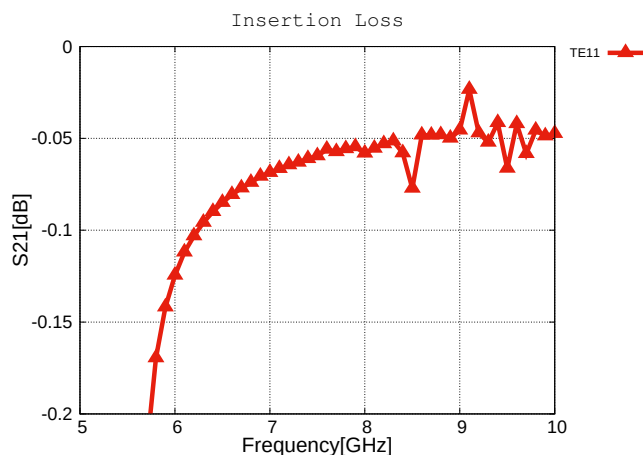


図 6 circular model 1 入力損失

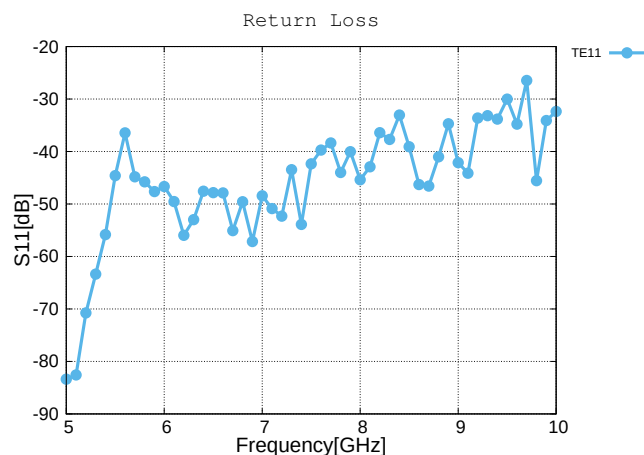


図 7 circular model 1 反射損失

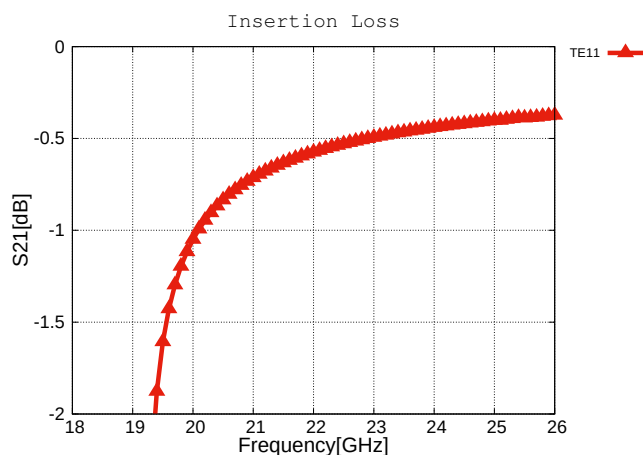


図 8 circular model 2 入力損失

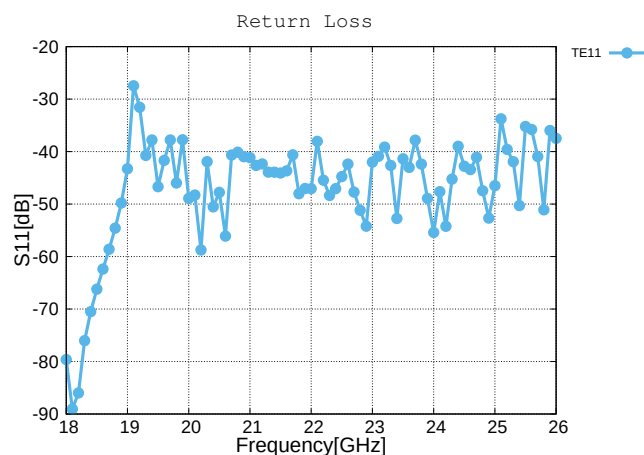


図 9 circular model 2 反射損失

2.3 再解析

2.3.1 解析設定

同一モデルに対して、設定を変えて再解析を行った。解析設定は表 3 に示す。変更点は Solution freq. と Sweep type である。解析周波数範囲の最高周波数となるように Solution freq. を circular model 1 に対しては 10GHz、circular model 2 に対しては 26GHz とした。また Sweep type は Interpolating から Discrete に変更した。これは HFSS が用意する 3 つの Sweep type のうち Discrete がもっとも精度良く解析できるからである。

表 3 circular model 1、2 の再解析設定

Set up	circular model 1	circular model 2
直径	32mm	9.3mm
長さ	1000mm	1000mm
Solution freq.	10GHz	26GHz
Max Delta S	0.02	0.02
Max no. of passes	6	6
Freq. range	4-10(0.1)GHz	18-26(0.1)GHz
Sweep type	Discrete	Discrete
Num. of modes	2	2
Boundaries	Aluminum	Aluminum

2.3.2 再解析結果

再解析結果を図 10-図 13 に示す。再解析の結果は、6.7GHz で入力損失が約 -0.077dB 、反射損失が約 -88dB 、22GHz で入力損失が約 -0.568dB 、反射損失が約 -97dB という結果がそれぞれ得られた。図 10 から図 6 でみられた周波数の不規則な増減が消えたことがわかる。

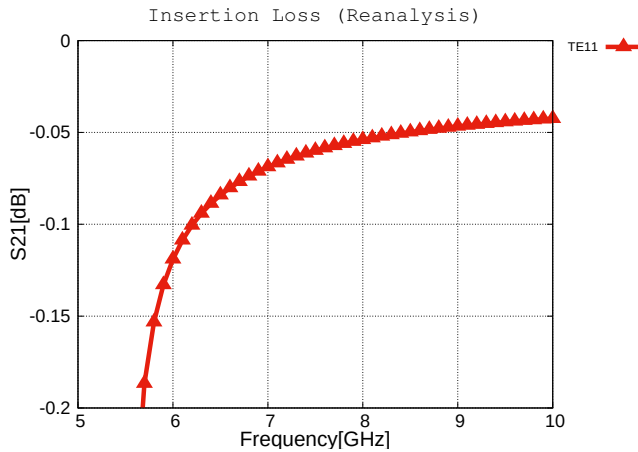


図 10 circular model 1 入力損失 (再)

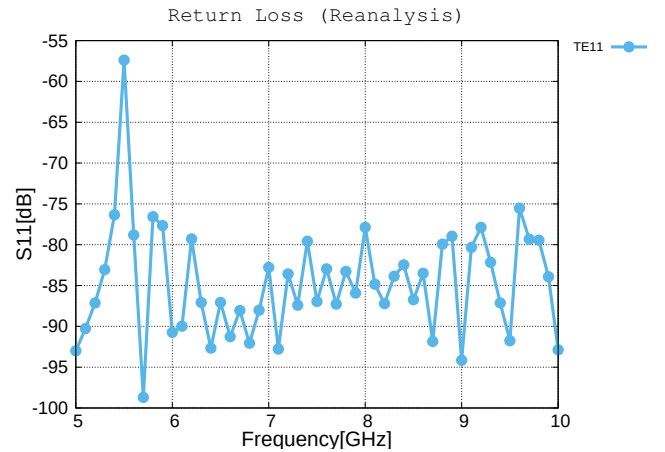


図 11 circular model 1 反射損失 (再)

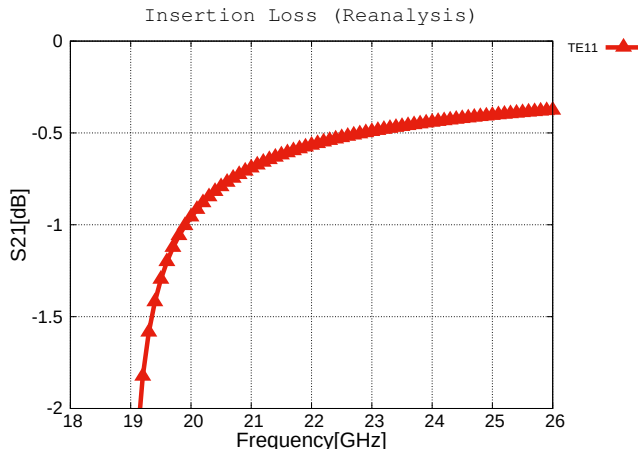


図 12 circular model 2 入力損失 (再)

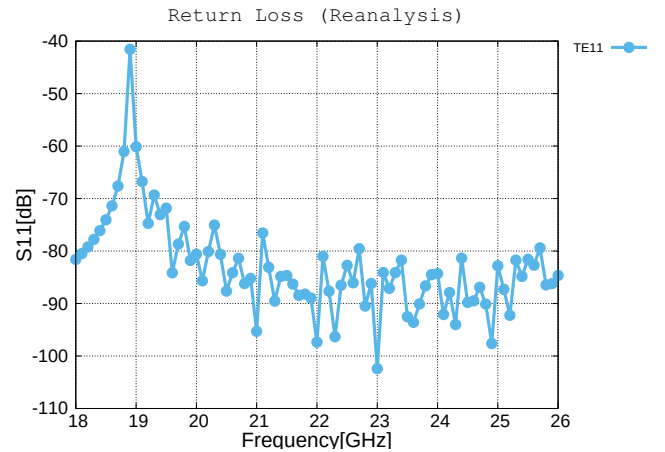


図 13 circular model 2 反射損失 (再)

2.4 考察

2.4.1 遮断周波数

図 10 を見ると、5.5GHz 付近で急激に減衰が大きくなっていることがわかる。これは円形導波管の遮断周波数 (cutoff frequency) で理解出来る。円形導波管 TE_{11} モードの遮

断周波数は [5] より以下のように与えられる。

$$f_c = \frac{y'_{11}}{2\pi a} c \quad (1)$$

a は円形導波管の半径、 c は光速を表す。また y'_{11} は 1 次 Bessel 関数の導関数の 1 番目のゼロ点の値であり $y'_{11} = 1.841$ である。直径 32mm の円形導波管、 TE_{11} モードの遮断周波数は式 (1) より、5.49GHz となる。つまり、直径 32mm の円形導波管には 5.49GHz 以下の TE_{11} モードは伝搬不可能である。同様に直径 9.3mm の円形導波管の TE_{11} モードの遮断周波数は 18.9GHz と求められる。図 12 から 19GHz 付近に遮断周波数があることがわかる。

2.4.2 評価

解析時間短縮のため導波管の長さを 1000mm(1m) として解析したが、我々が要求する導波管は 10000mm(10m) の長い導波管である。そこで今回得られた入力損失の結果を 10 乗 (デシベル表示の場合は 10 倍) することで長さ 10m での入力損失を見積もった。circular model 1 の 6.7GHz の入力損失は -0.077dB であった。10 倍すると -0.77dB となり、比に直すと約 84% となり入力強度の 16% が失われることになる。同様に circular model 2 の 22GHz 入力損失は -0.568dB だが、10 倍すると -5.68dB となり比に直すと約 27% になり、入力強度の 73% が失われることになる。これらは入力損失の目標性能である -0.45dB 以上を満たさない。よって直径 32mm、および 9.3mm の円形導波管では目標を満たさないことがわかった。

表 4 解析結果まとめ

モデル	周波数 [GHz]	長さ [mm]	入力損失 [dB]	反射損失 [dB]
circular model 1	6.7	1000	-0.077	-88
		10000	$-0.77(16\% \text{ 損失})$	-
circular model 2	22	1000	-0.568	-97
		10000	$-5.68(73\% \text{ 損失})$	-

2.5 今後の設計方針

今回は2つの受信機の電波入力部の直径に合わせて2つの円形導波管の解析を行った。しかし、受信機の切り替えごとに長さが10mにもなる長い導波管を付け替えるのでは、本研究の目的である容易に受信機の切り替えを行う目的に適さない。受信機の切り替えを容易に行うには長い導波管は1本であることが必要である。そこで今後の章では1本の導波管モデルに6-9GHz帯、22GHz帯を入力する解析を示す。また同一の導波管に6-9GHz帯、22GHz帯を伝送させるには、直径を6-9GHz帯のものにする必要がある。それは、遮断周波数のためである。§2.4.1で見たように、直径32mm円形導波管の遮断周波数は5.49GHzであるから6-9GHz帯、22GHz帯両方の伝送が可能である。しかし、直径9.3mm円形導波管の遮断周波数は18.9GHzのため22GHz帯の伝送は可能だが、6-9GHz帯の伝送は不可能である。そのため6-9GHz帯と22GHz帯の両方を伝送させるには、導波管の入出力形状を円形とする場合は直径を32mm以上とする必要がある。

3 円形導波管の解析Ⅱ

3.1 解析設定

円形導波管の減衰定数 α と半径 a には $\alpha \propto 1/a$ なる関係があるため (後述)、直径を大きくすることで損失が小さくなると考えられる。そこで新たに直径 60mm、長さ 1000mm の円形導波管モデル (circular model 3) を製作し 6-9GHz 帯、22GHz 帯を挿入する解析を行った。解析モデルを図 14、設定を表 5 に示す。

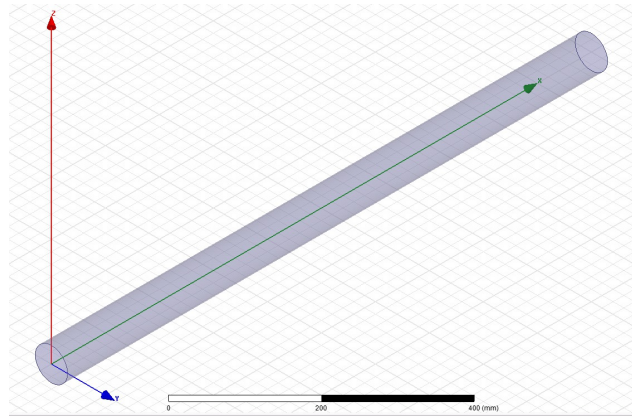


図 14 直径 60mm、長さ 1000mm の円形導波管モデル

表 5 circular model 3 解析設定及びメッシュ設定

直径	60mm	Sweep type	Discrete
長さ	1000mm	Num. of modes	10
Solution freq.	23GHz	Boundaries	Aluminum
Max Delta S	0.01	curvilinear	あり
Max no. Passes	8	surface normal deviation	15
Freq. range	6-9,21-23(0.1)GHz	Max aspect ratio	4

ここで新たに登場したメッシュ設定について解説する。なお circular model 1、circular model 2 についてはこれらの設定をしていない。

3.1.1 Curvilinear

モデル分割に使われる要素に 2 次要素を用いるかどうかの設定である。HFSS ではモデル分割の要素に四面体要素を用いる。その四面体の各辺の中間に節点をつくることで四面体の要素形状を柔軟にする。円形導波管のように曲面が用いられるモデルに対して Curvilinear を設定することで、少ない要素数で高精度の解析を行うことができる。

3.1.2 Surface Normal Deviation

円弧にメッシュを生成する際の近似角度の設定。デフォルトでは 22.5° である。

3.1.3 Max Aspect Ratio

メッシュの最大アスペクト比。比が大きいとゆがんだ要素が生成されてしまい、解析精度が悪くなってしまう。デフォルトでは円弧に対しては 10、それ以外の面に対しては 200 である。

3.2 解析結果

図 15-図 18 に円形導波管の基本モード TE_{11} の入力損失 (S_{21}) と反射損失 (S_{11}) の解析結果を示す。6.7GHz で入力損失が約 -0.015dB 、反射損失が約 -98dB 、22GHz で入力損失が約 -0.018dB 、反射損失が約 -39dB という解析結果が得られた。また図 19-図 20 に入力部の電場強度を示す。

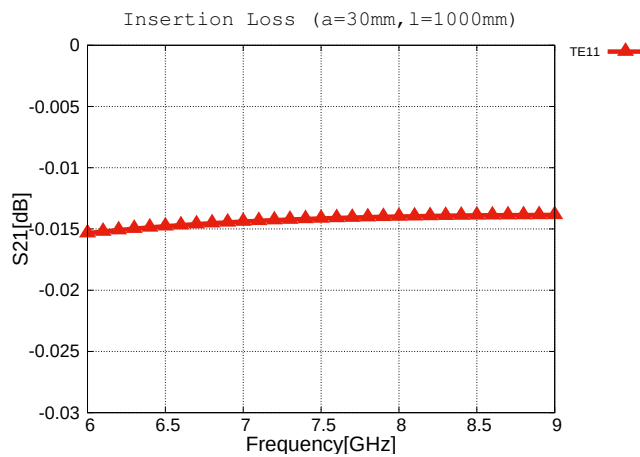


図 15 6-9GHz 帯入力損失

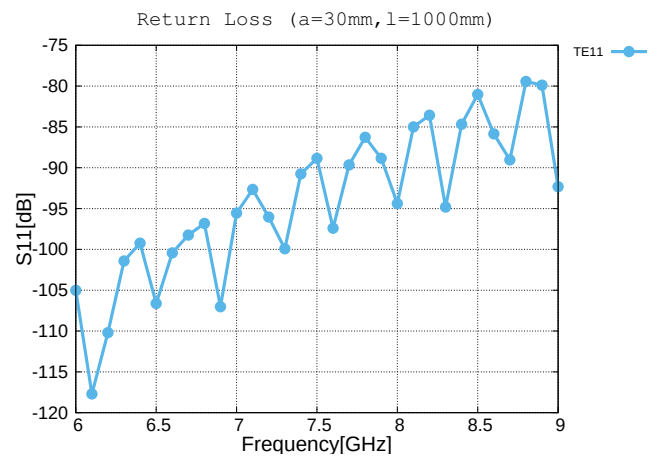


図 16 6-9GHz 帯反射損失

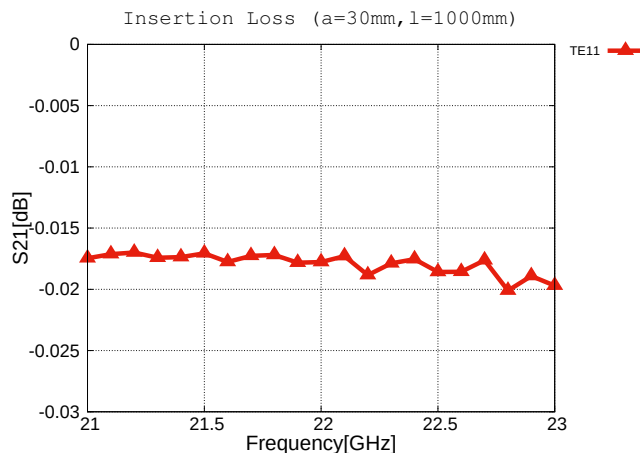


図 17 22GHz 帯入力損失

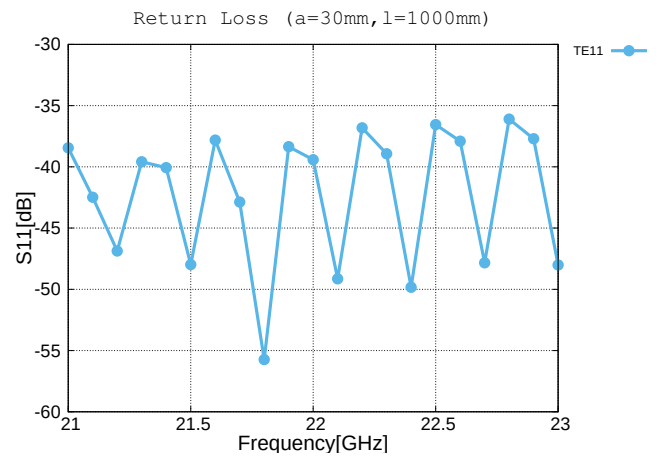


図 18 22GHz 帯反射損失

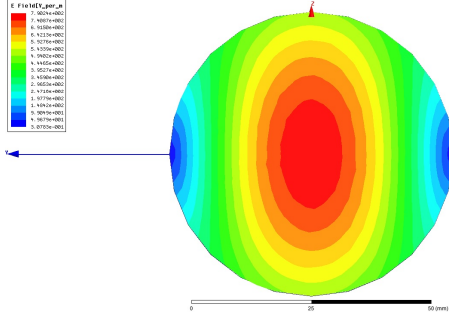


図 19 入力部電場分布 (6.7GHz)

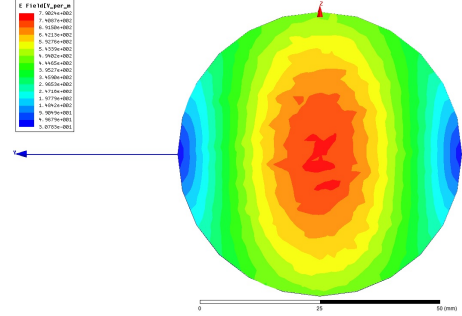


図 20 入力部電場分布 (22GHz)

3.3 考察

3.3.1 減衰定数

TE₁₁ モードの損失が小さくなった理由を考える。[5] より円形導波管 TE_{mn} モードの減衰定数 α は以下で与えられる。

$$\alpha = \frac{R}{120\pi a} \left[(f_c/f)^2 + \frac{(m/y'_{mn})^2}{1 - (m/y'_{mn})^2} \right] \frac{1}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}. \quad (2)$$

ただし、 f_c :遮断周波数、 f :入力周波数、 a :円形導波管の半径、 y'_{mn} : m 次ベッセル関数の導関数の n 番目のゼロ点の値であり一例を表 17 に示す。 R は以下のように定義し、 $\omega = 2\pi f$:角周波数、 μ :透磁率、 σ :導電率である。

$$R = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}. \quad (3)$$

式 (2) より減衰定数と円形導波管の半径には $\alpha \propto 1/a$ なる関係がある。つまり、ある周波数に対して同一のモードであれば円形導波管の直径が大きいほど減衰は小さくなる。表 6 に TE₁₁ モードの減衰定数の計算結果を載せる。ただし、アルミニウムの透磁率 $\mu = 1.256 \times 10^{-6}$ [H/m]、導電率 $\sigma = 3.364 \times 10^7$ [S/m] を計算に用いた。なお式 (2) の減衰定数は Np/m で得られるが、1Np $\approx$ 8.686dB なる変換を行った。ネーパ (Np) とはデシベル (dB) 同様に比率を表す単位である。デシベルが常用対数に基づくのに対して、ネーパは自然対数に基づいている。計算結果は TE₁₁ モードの入力損失の解析結果とおおよそ一致した。

表 6 TE₁₁ モードの減衰定数

直径 [mm]	周波数 (f)[GHz]	減衰定数 (α)[dB/m]
9.3	22	0.569
32	6.7	0.077
60	22	0.017
	6.7	0.015

3.3.2 遮断周波数

円形導波管の TM_{mn} モード、TE_{mn} モードの遮断周波数 (f_c) は [5] より以下のように書ける。

$$f_c = \frac{y_{mn}}{2\pi a} c \text{ (TM}_{mn}\text{)}, \quad (4)$$

$$f_c = \frac{y'_{mn}}{2\pi a} c \text{ (TE}_{mn}\text{)} \quad (5)$$

ただし、 c :光速を表す。なお遮断周波数 f_c 添え字の c は Cutoff を意味するのであり、光速の c とは全くの別物であることに注意。また y_{mn} は m 次 Bessel 関数、 n 番目のゼロ点の値であり表 16 に一例を示す。式 (4)、(5) より直径 60mm 円形導波管の遮断周波数を低次のものから求めると表 7 のようになる。表 7 からわかるように、6-23GHz において伝送したい基本モード TE₁₁ 以外に多数の高次モードも伝送されてしまう。これを確認するために HFSS で直径 60mm、長さ 100mm、完全導体として解析した結果が図 21 である。

表 7 直径 60mm 円形導波管の各モードの遮断周波数

モード	遮断周波数 (f_c)[GHz]	モード	遮断周波数 (f_c)[GHz]
TE ₁₁	2.93	TE ₁₂	8.48
TM ₀₁	3.83	TM ₀₂	8.78
TE ₂₁	4.85	TM ₃₁	10.15
TM ₁₁ , TE ₀₁	6.09	TM ₅₁	10.21
TE ₃₁	6.68	TE ₂₂	10.67
TM ₂₁	8.17	TM ₁₂ , TE ₀₂	11.16
TE ₄₁	8.46		

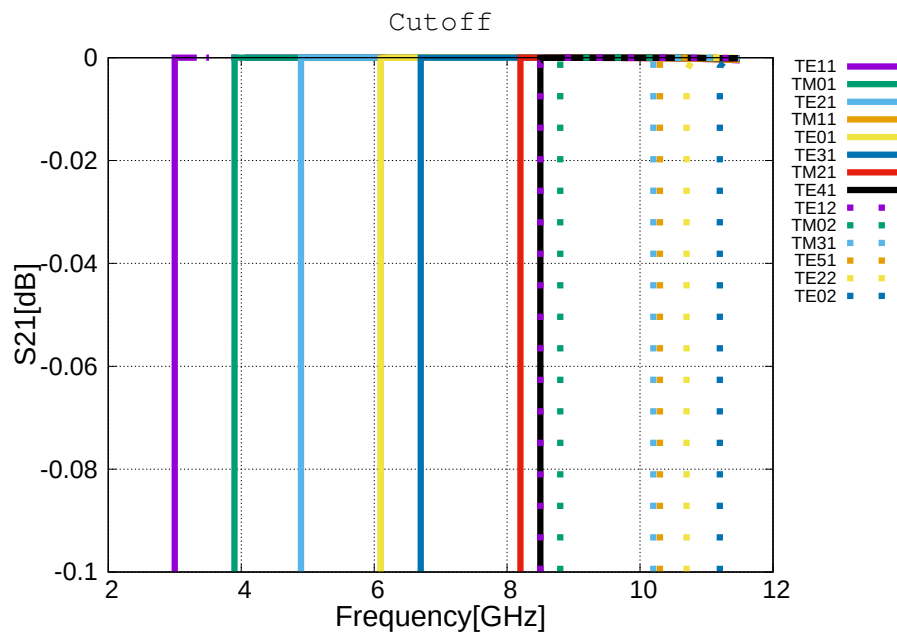


図 21 各モードの遮断周波数

3.3.3 評価

今回の解析結果の 10m での TE_{11} モードの入力損失を見積もった。6.7GHz では -0.15dB で電力の比に直すと約 96.6% となり入力強度の約 3.4% が損失する計算となる。また 22GHz では -0.18dB となり比で約 95.9% となり入力強度の約 4.1% が損失する計算となる。これらは目標の入力損失 -0.45dB 以上を満たす。直径を大きくしたことで損失が小さくなった。しかし TE_{11} モード以外のモードも伝送される結果となった。多モードが伝送されることによる影響は実際に試作機を作成して確認する必要があると思われる。また今回のモデルは直径 60mm であるから実際にこの導波管を用いるには 6-9GHz の受信機の場合、直径 60mm から直径 32mm、22GHz の受信機の場合、直径 60mm から直径 9.3mm に変換する径変換の導波管が必要である。そのためこれら径変換導波管の解析が必要となる。

表 8 circular model 3 解析結果まとめ

周波数 [GHz]	長さ [mm]	入力損失 [dB]	反射損失 [dB]
6.7	1000	-0.015	-98
	10000	$-0.15(3.4\% \text{ 損失})$	-
22	1000	-0.018	-39
	10000	$-0.18(4.1\% \text{ 損失})$	-

4 円形コルゲート導波管の解析 I

4.1 解析設定

切り替え用導波管候補の一つとして円形コルゲート導波管の解析を行った。円形コルゲート導波管とは円形導波管の円周方向に周期的に溝が掘られた導波管のことである。この導波管の特徴は長距離でも低損失が期待できることである。図 22 は解析モデルであり、図 23 はモデルの断面図である。パラメータはそれぞれ d : 溝の深さ、 p : 溝の間隔、 w : 溝の幅、 $t(=p-w)$: 歯の厚さを表す。円形コルゲート導波管で低損失を実現するにはパラメータの調整が必要で [7][8] より、 $a \gg \lambda$ 、 $d \approx \lambda/4$ 、 $p \approx \lambda/3$ 、 $w < p/2$ 、という条件がある。今回設定したパラメータを表 9 にまとめた。また長さは 501.83mm とした。

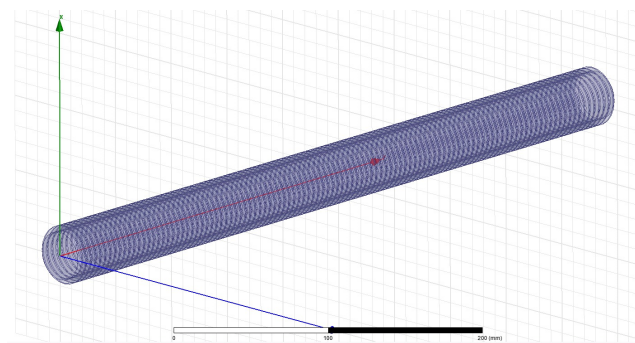


図 22 直径 32mm、長さ 501.83mm の円形コルゲート導波管モデル

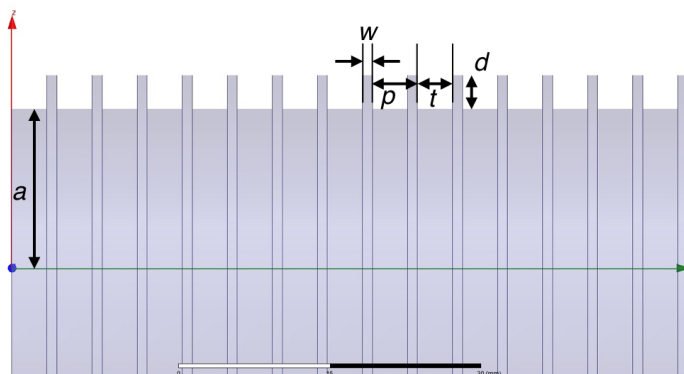


図 23 モデル断面図

表 9 corrugated model 1 パラメータ

設計波長 (λ)	13.6mm
直径 ($2a$)	32mm
溝の深さ (d)	3.4mm
溝の間隔 (p)	4.53mm
溝の幅 (w)	1mm
歯の厚さ (t)	3.53mm
長さ	501.83mm

表 10 corrugated model 1 解析設定及びメッシュの設定。表 5

Solution freq.	23GHz	Num. of modes	10
Max Delta S	0.01	Boundaries	Aluminum
Max no. of passes	8	curvilinear	あり
Freq. range	6-9,21-23(0.1)GHz	surface normal deviation	15
Sweep type	Discrete	Max aspect ratio	4

4.2 解析結果

図 24-図 27 に解析結果を示す。6.7GHz で入力損失が約 -0.052dB 、反射損失が約 -40dB - -35dB 、22GHz で反射損失が約 -30dB - -20dB という結果がそれぞれ得られた。22GHz 帯の入力損失の結果を見るとサインカーブのような周波数特性が見られる。そのため 22GHz の値のみを抜き出した評価は適切でないと思われる。21-23GHz の範囲で得られた入力損失の結果の最悪値、 -2.246dB を 22GHz 帯入力損失の代表値として用いる。

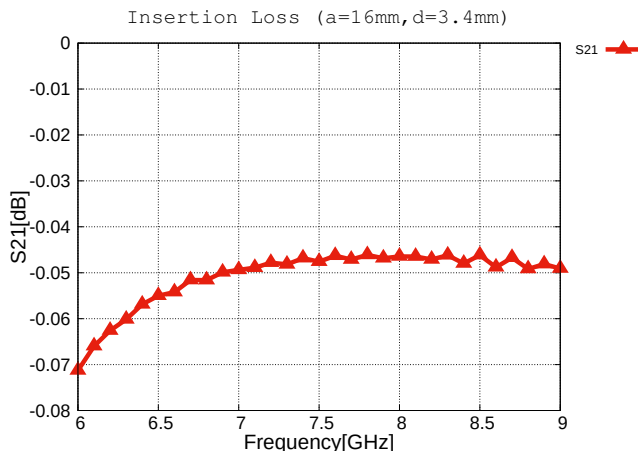


図 24 6-9GHz 帯入力損失

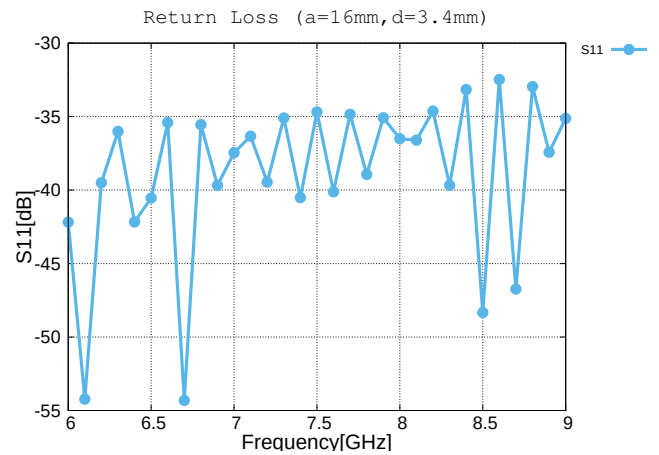


図 25 6-9GHz 帯反射損失

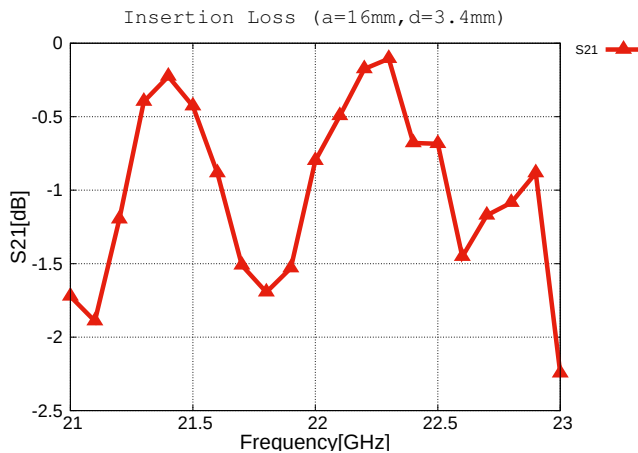


図 26 22GHz 帯入力損失

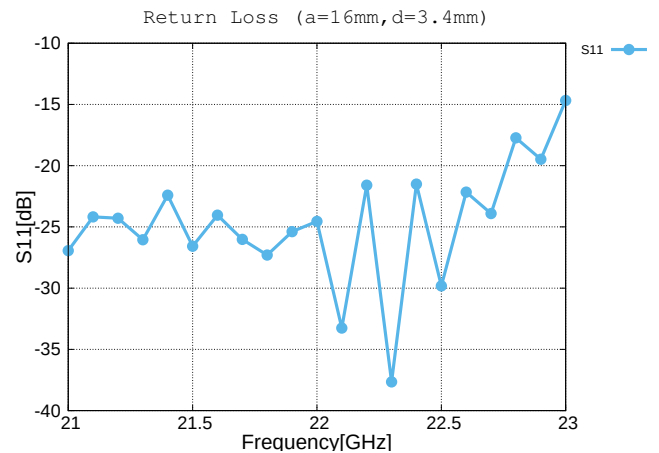


図 27 22GHz 帯反射損失

4.3 考察

4.3.1 基本モード

円形コルゲート導波管の基本モードは HE_{11} モードである [7][8]。HFSS では解析の際にどのようなモードを生成するかを指定できず、導波管入力部の形状に合わせたモードが生成される。そのため円形コルゲート導波管の入力部は円形導波管と同じであると見なせるため、生成されたモードは HE_{11} 以外のモードであると考えられる。図 28-図 29 は今回の解析で生成した導波管入力部の電場分布である。図 32 に HE_{11} モードの電場ベクトルと電場分布を示す。

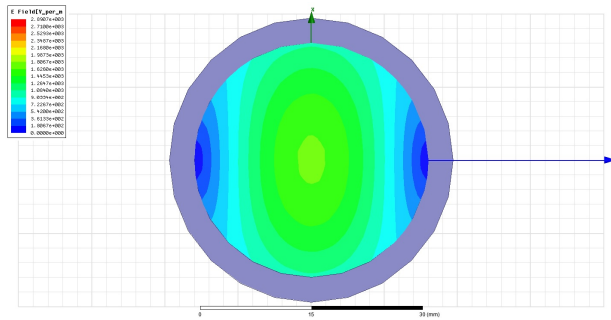


図 28 入力部電場分布 (6.7GHz)

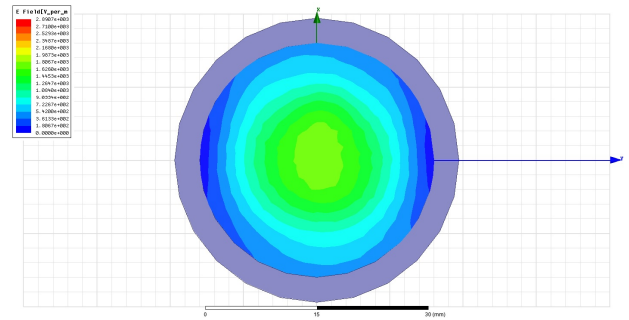


図 29 入力部電場分布 (22GHz)

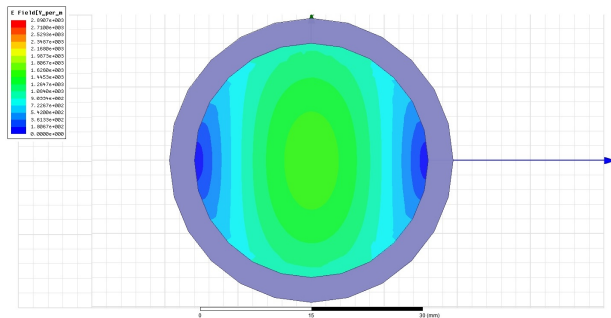


図 30 導波管中間部電場分布 (6.7GHz)

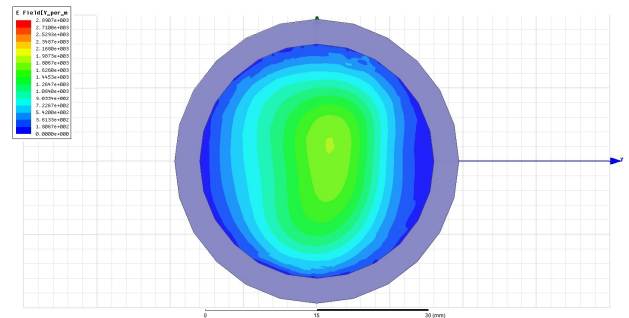


図 31 導波管中間部電場分布 (22GHz)

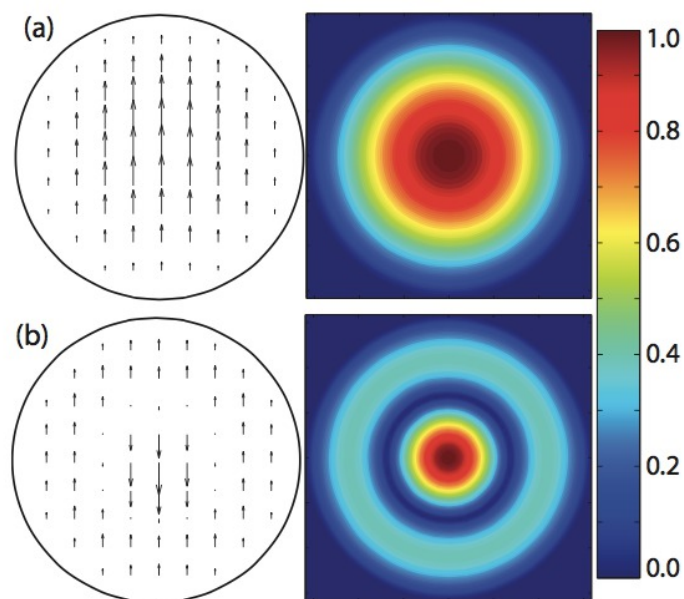


図 32 電場ベクトル (左) と強度 (右)(振幅は規格化されている)(a)HE₁₁ モード
(b)HE₁₂ モード ([11] より抜粋)

4.3.2 評価

今回は長さ約 50cm での解析であった。この結果を 2 倍して得られる長さ 1m での入力損失の推定値を表 11 にまとめた。corrugated model 1 の入力損失の推定値は circular model 3 の解析値よりも悪い結果となった。これは §4.3.1 で記述したように挿入されたモードが適切ではないためと考えられる。corrugated model 1 では目標を満たさないため、このままでは使用できないことがわかった。

表 11 corrugated model 1 解析結果まとめ

周波数帯 [GHz]	長さ [mm]	入力損失 [dB]	反射損失 [dB]
6.7	501.83	−0.052	−40 - −35
	1000	−0.104	-
22	501.83	−2.246	−30 - −20
	1000	−4.492	-

5 円形コルゲート導波管の解析Ⅱ

5.1 解析設定

円形コルゲート導波管内に HE_{11} モードを発生させるために、 TE_{11} モードを HE_{11} モードに変換させる、モード変換器付き円形コルゲート導波管モデル (corrugated model 2) の解析を行った。図 33 は解析モデルである。円形導波管部、コルゲートモード変換器部、円形コルゲート導波管部からなり、円形導波管部で入力された TE_{11} をモード変換器部で HE_{11} に変換し、円形コルゲート導波管部に HE_{11} モードを入力させる。出力部はこの逆の過程をたどる。[9][10] よりモード変換をするには溝の深さを $\lambda/2$ から徐々に $\lambda/4$ に変化させる必要がある。図 34 はモデルの断面図でありパラメータは h :円形導波管部の長さ、 d_i ($i = 1 - 10$):モード変換器部の溝の深さをそれぞれ表す。

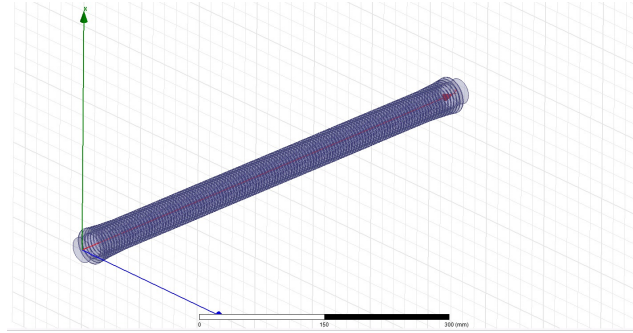


図 33 直径 32mm、モード変換器付き円形コルゲート導波管モデル

表 12 corrugated model 2 パラメータ

設計波長 (λ)	13.6mm	d_1	6.80mm	d_6	4.53mm
半径 (a)	16mm	d_2	6.18mm	d_7	4.25mm
溝の深さ (d)	3.4mm	d_3	5.67mm	d_8	4.00mm
溝の間隔 (p)	4.53mm	d_4	5.23mm	d_9	3.78mm
溝の幅 (w)	1mm	d_5	4.86mm	d_{10}	3.58mm
歯の厚さ (t)	3.53mm	円形部長さ (h)	15mm	全長	624.43mm

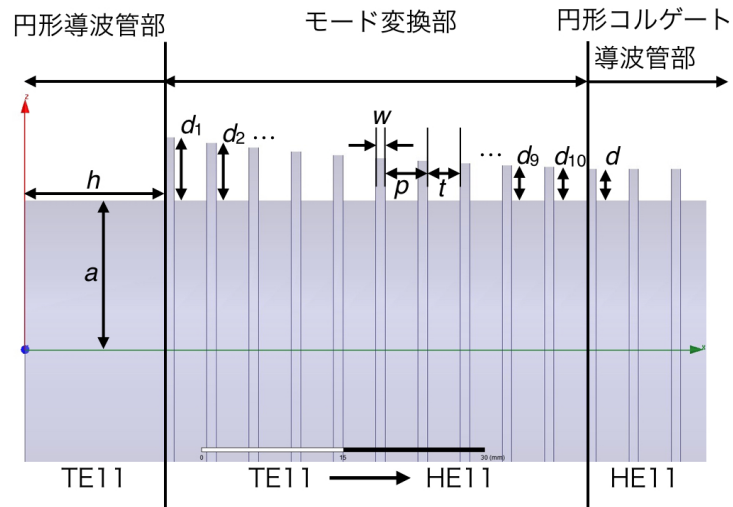


図 34 corrugated model 2 断面図

表 13 corrugated model 2 解析設定及びメッシュの設定

Solution freq.	23GHz	Num. of modes	10
Max Delta S	0.01	Boundaries	Aluminum
Passes	8	curvilinear	あり
Freq. range	6-9GHz,21-23GHz	surface normal deviation	15
Sweep type	Discrete	Max aspect ratio	4

5.2 解析結果

図 35-図 38 に解析結果を示す。6.7GHz での入力損失は -0.071dB 、反射損失は $-35\text{--}25\text{dB}$ であった。図 37 から 22GHz 帯の入力損失はモード変換器無しのコルゲート導波管の結果 (図 26) 同様サインカーブのような周波数特性がみられた。そのため今回も得られた入力損失の結果の最悪値をとると -0.592dB となる。反射損失は結果を得た範囲では -40dB 以下となった。

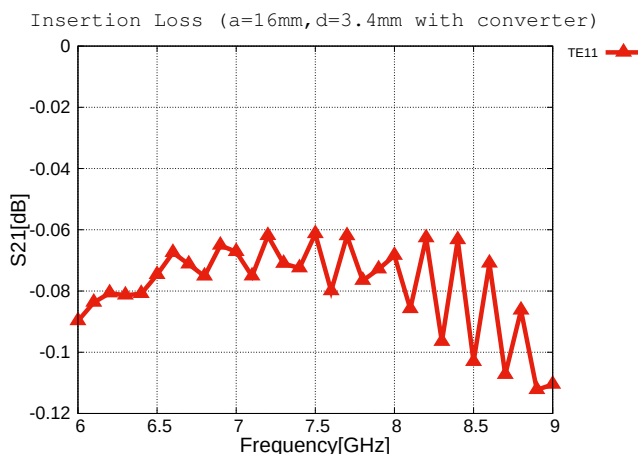


図 35 6-9GHz 帯入力損失

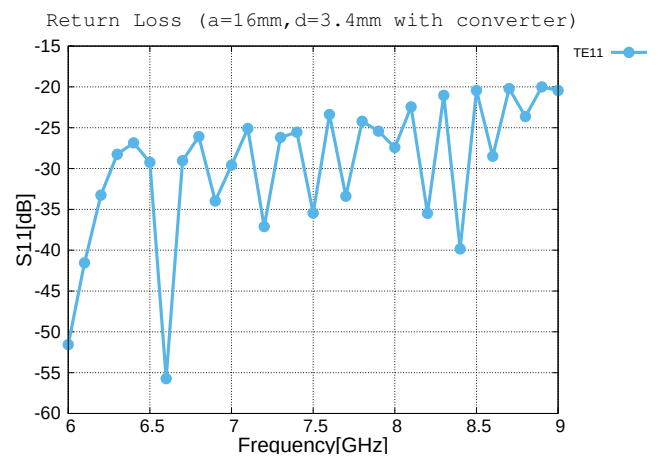


図 36 6-9GHz 帯反射損失

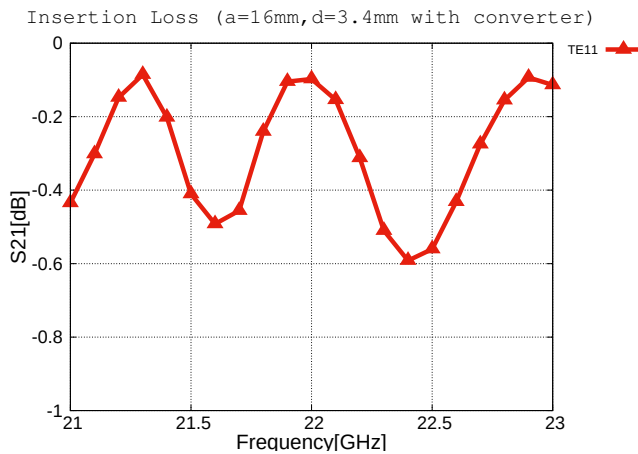


図 37 22GHz 帯入力損失

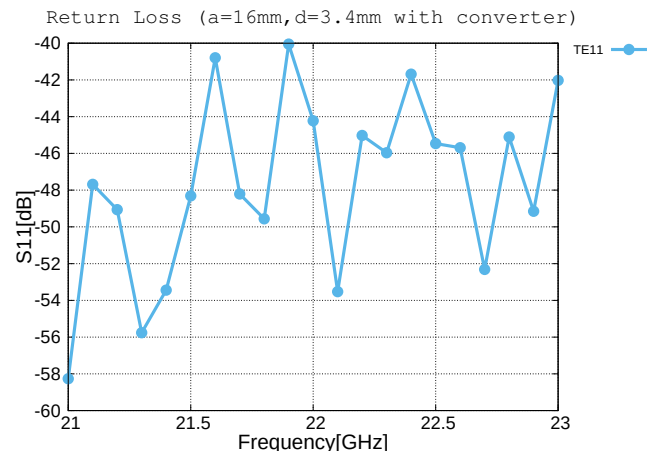


図 38 22GHz 帯反射損失

5.3 考察

5.3.1 生成モード

図 39-図 42 に導波管入力部の電場と導波管中間部の電場を示す。図 42 をみると図 32 の HE_{11} モードと似たような同心円状の電場分布をしている。モード変換器を取り付けたことにより 22GHz において HE_{11} モードが生成されたと考えられる。 HE_{11} モードが生成されたことにより入力損失の改善がなされたと考えられる。

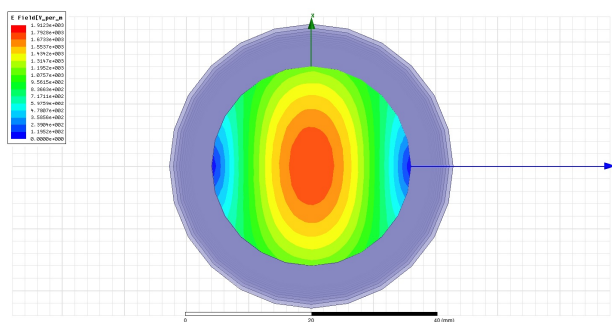


図 39 入力部電場分布 (6.7GHz)

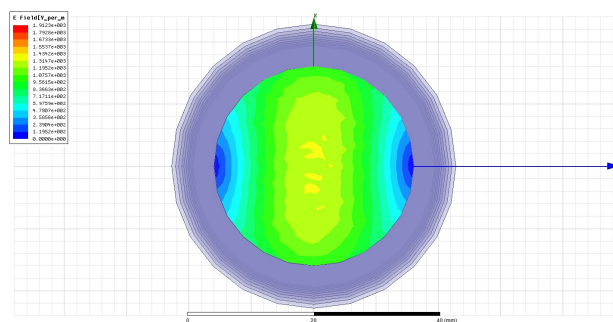


図 40 入力部電場分布 (22GHz)

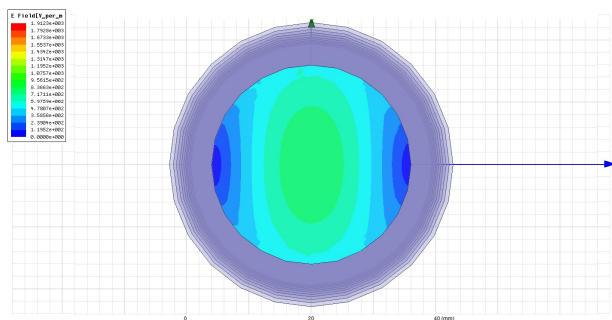


図 41 導波管中間部電場分布 (6.7GHz)

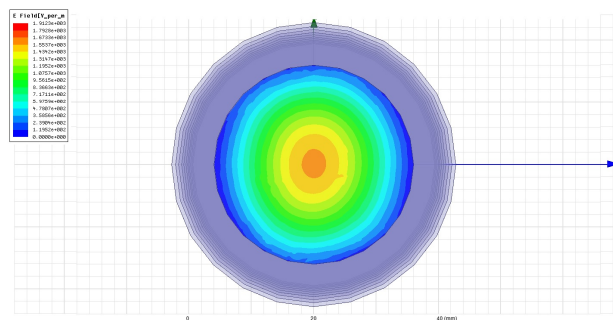


図 42 導波管中間部電場分布 (22GHz)

5.3.2 評価

今回の導波管の全長は変換器を含めて 624.43mm となる。得られた入力損失を 1.6 倍して得られる長さ約 1000mm での入力損失の推定値は、6.7GHz では -0.114dB 、22GHz では -0.947dB である。表 14 に解析結果と推定値を記す。このままでは目標性能は満たさないことがわかった。しかし、22GHz 帯における 1000mm での入力損失の最悪値は -4.492dB から改善される結果となった。

表 14 corrugated model 2 解析結果まとめ

周波数帯 [GHz]	長さ [mm]	入力損失 [dB]	反射損失 [dB]
6.7	624.43	-0.071	$-35 - -25$
	1000	-0.114	-
22	624.43	-0.592	< -40
	1000	-0.947	-

5.3.3 設定パラメータ

今回、導波管直径を $2a = 32\text{mm}$ 、設計波長 $\lambda = 13.6\text{mm}$ として解析を行った。しかしこれは円形コルゲート導波管の低損失の条件の一つ $a \gg \lambda$ を満たしているとは言い難い。直径を大きくすることで損失の改善が期待できると思われる。また、他のパラメータ d 、 p 、 w 、 d_i についても最適化が必要と思われる。

6 まとめ

6.1 本研究の結果

本研究では、茨城 32m 電波望遠鏡に搭載する受信機切り替え用導波管の解析を行った。本解析で得られた結果をまとめる。corrugated model 1、2 の入力損失は 1000mm での推定値である。

表 15 全解析結果まとめ

モデル	直径 [mm]	周波数帯 [GHz]	入力損失 [dB]	反射損失 [dB]
circular model 1	32	6.7	-0.077	-88
circular model 2	9.3	22	-0.568	-97
circular model 3	60	6.7	-0.015	-98
		22	-0.018	-39
corrugated model 1	32	6.7	-0.104	-40 - -35
		22	-4.492	-30 - -20
corrugated model 2	32	6.7	-0.114	-40 - -35
		22	-0.947	-30 - -20

6.2 今後の課題

今後の課題として必要であろう解析、検証を挙げる。

- 高次モード伝送の影響の検証。直径 60mm の円形導波管では TE_{11} 以外の高次モードも伝送可能である。そのため高次モードが伝送による影響を検証する必要がある。
- 基本モードから高次モードへの変換の検証。入力した TE_{11} がどの程度、他のモードに変換されているかを検証する必要があると思われる。
- 高次モードの遮断周波数の検証。直径 60mm の円形導波管の高次モードの遮断周波数を確認するために、直径 60mm、長さ 100mm、完全導体として解析した。完全導体をアルミニウムに変えて解析を行う必要がある。
- 径変換の導波管の解析。受信機電波入力部直径は 6-9GHz 帯で 32mm、22GHz 帯で 9.3mm である。直径 60mm の円形導波管ではそのまま接続できないので、直径を変換する径変換の導波管の解析が必要である。

- 円形コルゲート導波管の直径を大きくした場合の解析。今回の円形コルゲート導波管の直径は 32mm として解析を行った。低損失の条件として入力波長 λ と半径 a の関係が、 $a \gg \lambda$ を満たす必要がある。今回は半径 16mm、波長 13.6mm(22GHz) として解析した。半径が波長に対して十分大きいとは言えないため、直径をより大きくした場合の解析が必要である。
- 円形コルゲート導波管のパラメータの最適化。各パラメータ d 、 p 、 w 、 d_1 についての最適化も必要となると思われる。

付録 A S パラメータと入力損失・反射損失



図 43 2 ポート

A.1 S パラメータ

マイクロ波では線路上の電圧 V や電流 I が直接測定可能な場合は限られており、またそれらの量を一義的に定義できない場合がある。そこで一般的に測定可能な電力の伝送や反射に関するスキャタリング・パラメータ (scattering parameter) が考え出された。ここでは 2 ポートの S パラメータについての概説を行う。各ポートから流入する電力を P_i^a 、流出する電力を P_j^b とする。i, j はポート番号 1 または 2 を表す。電力のそれぞれの平方根を入力波 a_i 、出力波 b_j として定義する。

$$a_i = \sqrt{P_i^a} = \frac{V_i^a}{\sqrt{Z_0}}, \quad (6)$$

$$b_j = \sqrt{P_j^b} = \frac{V_j^b}{\sqrt{Z_0}} \quad (7)$$

V_i^a は入力電圧、 V_i^b は出力電圧表し、 Z_0 はポートの特性インピーダンスを表す。すると、S パラメータは以下のように定義される。

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2, \quad (8)$$

$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2. \quad (9)$$

行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ここで、

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

とそれぞれ置くと、

$$\mathbf{b} = S\mathbf{a} \quad (10)$$

と表せ、 $\mathbf{a}$ は入射波ベクトル、 $\mathbf{b}$ は出力波ベクトルで、 S は散乱行列 (scattering matrix) である。 $a_i (i = 1, 2)$ はそれぞれのポートへの入射波で、 $b_i (i = 1, 2)$ は各ポートからの出力波である。

ここで $a_2 = 0$ の場合、つまり入力ポート 1 のみの場合を考える。すると上式は

$$S_{11} = b_1/a_1, \quad (11)$$

$$S_{21} = b_2/a_1. \quad (12)$$

とそれぞれ表すことができる。このとき、 a_1 :入射波、 b_1 :反射波、 b_2 :透過波、 S_{11} :反射係数、 S_{21} :透過係数となる。

通常 S パラメータは常用対数を用いて dB(デシベル) 表記されることが多い。本稿で取り扱う S パラメータは全てデシベル表記である。入射波を a_i 、出力波を b_j とすると、 S パラメータのデシベル表記は

$$S_{ij} = 20 \log_{10} \left(\frac{b_j}{a_i} \right) \text{ [dB]}, \quad (13)$$

$$S_{ij} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_j^b}{P_i^a} \right) \text{ [dB]}. \quad (14)$$

なお、本稿でデシベルを比に変換する際は、全て電力比として変換している。

A.2 入力損失・反射損失

次に入力損失及び反射損失について述べる。

A.2.1 入力損失

まず入力損失について述べる。図 43 において $a_2 = 0$ の場合を考える。また導波管内に入射波を増幅する装置がない場合、 $b_2 \leq a_1$ の関係を満たすはずである。入力損失とは、入力した電波強度に対して、導波管を通過した電波強度がどの程度かを示す値である。これは a_1 と b_2 の比、 S_{21} に相当し、デシベル表示にすると

$$S_{21} = 20 \log_{10} \left(\frac{b_2}{a_1} \right) \text{ [dB]}, \quad (15)$$

と表せる。入力したものがそのまま出力される、つまり $a_1 = b_2$ が理想である。なので入力損失は 0dB に近いほど良い。

A.2.2 反射損失

次に反射損失について述べる。図 43 において $a_2 = 0$ の場合を考える。電波を導波管に入力する際には全ての電波が入力されるわけではなく、入力部でインピーダンス不整合による反射が起こる。反射損失は入力した電波強度に対して、どの程度入力部で反射されているかを示す値である。これは a_1 と b_1 の比、 S_{11} に相当し、デシベル表示は

$$S_{11} = 20 \log_{10} \left(\frac{b_1}{a_1} \right) \text{ [dB]}, \quad (16)$$

となる。反射はない方が良い、つまり $b_1 = 0$ が理想となるので、反射損失は負の値で絶対値が大きほど良いといえる。

付録 B 円形導波管内における電磁波の伝播

B.1 円筒座標系

B.1.1 円筒座標系の定義

まず円筒座標系を定義する。図 44 よりデカルト座標系 (x, y, z) と円筒座標系 (r, θ, z) の関係を示す。

$$x = r \cos \theta, \quad (17)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (18)$$

$$z = z. \quad (19)$$

また、基底の関係は以下の通りである。

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (20)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (21)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \quad (22)$$

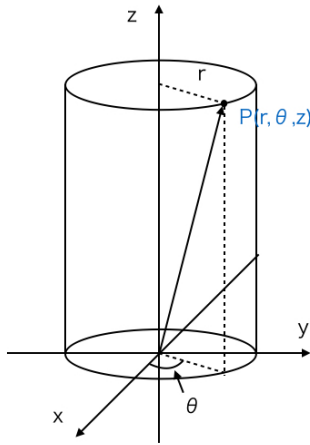


図 44 円筒座標系

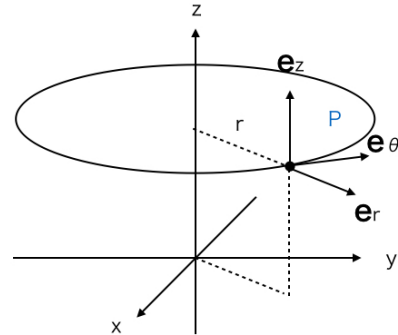


図 45 円筒座標系の基底

B.1.2 円筒座標系の勾配, 発散, 回転

次に円筒座標系での発散、回転を議論する。まずデカルト座標でのナブラは以下のようにかける。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (23)$$

式 (20)(21) より、

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (25)$$

また次の 2 式、

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y},$$

に式 (17)、(18) に代入し整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (27)$$

したがって、円筒座標系でのナブラは、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (28)$$

次に、円筒座標系でのベクトル場 $\mathbf{A}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z. \quad (29)$$

すると、円筒座標系でのベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散、回転は次の通りになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (31)$$

B.2 Maxwell 方程式

SI 単位系における Maxwell 方程式とは以下の 4 つの方程式系のことである。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (35)$$

上で出てきた諸量はそれぞれ $\mathbf{D}$:電束密度、 $\mathbf{B}$:磁束密度、 $\mathbf{E}$:電場、 $\mathbf{H}$:磁場、 ρ :電荷密度、 $\mathbf{i}$:電流密度、と呼ばれる。さらに次が成り立つ

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (36)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (37)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}. \quad (38)$$

σ は導電率、 ε は誘電率、 μ は透磁率と呼ばれる。電波天文学ではしばしば cgsGauss 単位系が使われるがその単位系での Maxwell 方程式を参考までに示す。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned}$$

以下で、円形導波管内での TM 波、TE 波の振る舞いを記述するがそれらは全て SI 単位系である。

B.3 円形導波管内の電磁場

円形導波管の中の電磁場を記述するには円筒座標系が便利である。図 44 のように、 r, θ, z を変数にもつ円筒座標を考え半径 a の円形導波管の中心軸を z 軸に合わせると、 z 方向に速度 v で進む平面電磁波は (j を虚数単位として)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}, \quad (39)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}. \quad (40)$$

ここで $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ は

$$\mathbf{E}_0(r, \theta) = E_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + E_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta + E_z(r, \theta) \mathbf{e}_z, \quad (41)$$

$$\mathbf{H}_0(r, \theta) = H_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + H_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta + H_z(r, \theta) \mathbf{e}_z. \quad (42)$$

管内での電荷密度 $\rho = 0$ 、電流密度 $\mathbf{i} = 0$ とすると、式 (34)、(35) は式 (37)、(38) より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (43)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (44)$$

式 (34) と式 (44) にそれぞれ、式 (39)、(40) を代入し、式 (31) を適用すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + j\frac{\omega}{v}rE_\theta = -j\omega\mu rH_r, \quad (45)$$

$$-j\frac{\omega}{v}E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu H_\theta, \quad (46)$$

$$\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -j\omega\mu rH_z. \quad (47)$$

また、

$$\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + j\frac{\omega}{v}rH_\theta = j\omega\varepsilon rE_r, \quad (48)$$

$$-j\frac{\omega}{v}H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j\omega\varepsilon E_\theta, \quad (49)$$

$$\frac{\partial(rH_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = j\omega\varepsilon rE_z. \quad (50)$$

ここで、式 (45)、(49) および、式 (46)、(48) より、

$$E_r = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\frac{r}{v} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right), \quad (51)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \mu r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (52)$$

$$H_r = \frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{r}{v} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (53)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\varepsilon r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right). \quad (54)$$

なお、

$$k_n^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (\omega^2 / v^2), \quad (55)$$

とする。

式 (51)-(54) からわかるように、 $E_z = H_z = 0$ となるような解は無意味となる。 $E_z \neq 0, H_z = 0$ となる波を TM 波 (transverse magnetic wave)、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ となる波を TE 波 (transverse electric wave) と呼ぶ。

B.3.1 TM 波

TM 波、つまり $E_z \neq 0, H_z = 0$ の場合を考える。式 (45)-(50) に $H_z = 0$ を代入し、 E_z について整理すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + k_n^2 E_z = 0. \quad (56)$$

ここで E_z をそれぞれ r, θ のみの関数の積で、

$$E_z(r, \theta) = E_{z1}(r)E_{z2}(\theta), \quad (57)$$

のように書けるとし、式 (56) に代入して整理すると、

$$\frac{1}{E_{z2}} \frac{d^2 E_{z2}}{d\theta^2} + \frac{1}{E_{z1}} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{z1}}{dr} \right) + r^2 k_n^2 E_{z1} \right\} = 0. \quad (58)$$

また便宜上 m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^2 E_{z2}}{d\theta^2} = -m^2 E_{z2}, \quad (59)$$

が成り立つものと仮定して式 (58) を書き直すと、

$$\frac{d^2 E_{z1}}{d(k_n r)^2} + \frac{1}{k_n r} \frac{dE_{z1}}{d(k_n r)} + \left\{ 1 - \frac{m^2}{(k_n r)^2} \right\} E_{z1} = 0. \quad (60)$$

これは $k_n r$ を変数とした Bessel の微分方程式であり、 E_{z1} の解は Bessel 関数 $J_m(k_n r)$ で与えられる。ここで m は Bessel 関数の次数である。式 (59) が成り立つためには E_{z2} が $\cos(m\theta)$ または $\sin(m\theta)$ でなければならないが、 $m = 0$ のとき E_{z2} が零とならないように $\cos(m\theta)$ を採用する。したがって、 $E_{z1} = J_m(k_n r)$ 、 $E_{z2} = \cos(m\theta)$ なので式 (57) より

$$E_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m(k_n r). \quad (61)$$

境界条件より、導体面上では電界の接線成分がゼロでなければならないので、 $r = a$ のとき $E_z = 0$ である。それを満たすには、 $r = a$ で $\cos(m\theta)$ が零となるとは限らないので

$$J_m(k_n a) = 0, \quad (62)$$

の条件が必要である。式 (61) の解は多数存在するが、一般に y_{mn} と書きあらわし、計算によって与えられる。ここで添字の m は Bessel 関数の次数を、 n は根の番号を示し、その値は小さいものから順番につける。根 y_{mn} の値をいくつかを表 16 に示す [5][6]。

この式 (62) の条件より、

$$k_n = \frac{y_{mn}}{a}, \quad (63)$$

となり式 (61) は、

$$E_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right). \quad (64)$$

表 16 $J_m(y_{mn}) = 0$ の根 y_{mn} の値

$\begin{array}{c} n \\ \backslash \\ m \end{array}$	1	2	3	4
0	2.405	5.520	8.654	11.792
1	3.832	7.016	10.173	13.324
2	5.136	8.417	11.620	14.796
3	6.380	9.761	13.015	16.223
4	7.588	11.065	14.372	17.616

よって、式 (64)、式 (51)-(54)、 $H_z = 0$ により TM 波の他成分が求められる。

$$E_r = -\frac{j\omega}{v(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right), \quad (65)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega m}{v(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right), \quad (66)$$

$$E_z = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right), \quad (67)$$

$$H_r = -\frac{j\omega \varepsilon m}{v(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right), \quad (68)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega}{v(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y_{mn}}{a} r \right), \quad (69)$$

$$H_z = 0. \quad (70)$$

実際の場の振るまいを示すには、振動項 $e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}$ を式 (65)-(70) につければよい。さて、上式からわかるように m と n の数によって様々な電磁界が存在しうる。このような電磁界の組み合わせをモード (mode) と呼び、 TM_{mn} と書いてモードの違いを表す。導波管断面における電磁界の分布は式 (65)-(70) からわかるが、その一例を図 46 に示す。

B.3.2 TE 波

TE 波つまり、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ の場合を考える。TM 波の場合と同様、式 (45)-(50) に $E_z = 0$ を代入し、 H_z について整理すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + k_n^2 H_z = 0. \quad (71)$$

式 (71) の解は TM 波の場合と同様 Bessel 関数で与えられる。

$$H_z = \cos(m\theta) J_m(k_n r). \quad (72)$$

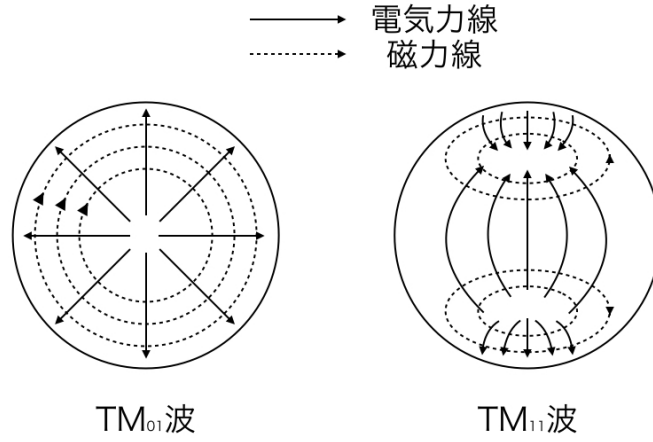


図 46 TM 波の一例 [5][6]

境界条件により、 $r = a$ での電界の接線成分はゼロ ($E_\theta = 0$)、また $E_z = 0$ から式 (45) より $H_r = 0$ 。したがって式 (49) より ($r = a$) において、

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0, \quad (73)$$

なる条件が成り立つ。ゆえに式 (72) から、

$$J'_m(k_n a) = 0, \quad (74)$$

となる。ここで $J'_m(k_n a)$ は $J_m(k_n r)$ を変数 $k_n r$ で微分して $r = a$ と置いたものである。この式の解は数学的にあらかじめ与えられる。これを y'_{mn} とおくとその値は表 17 のようになる [6]。

さて k_n は式 (74) より、

$$k_n = \frac{y'_{mn}}{a}. \quad (75)$$

したがって、 H_z は、

$$H_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (76)$$

表 17 $J'_m(y'_{mn}) = 0$ の根 y'_{mn} の値

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4
0	3.832	7.016	10.173	13.324
1	1.841	5.331	8.536	11.706
2	3.054	6.706	9.969	13.170
3	4.201	8.015	11.346	14.586
4	5.318	9.282	12.682	15.964

またその他の成分は H_z を式 (51)-(54) に代入することにより、求めることができる。

$$E_r = \frac{j\omega\mu m}{(y'_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (77)$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{(y'_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (78)$$

$$E_z = 0, \quad (79)$$

$$H_r = -\frac{j\omega}{v(y'_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (80)$$

$$H_\theta = \frac{j\omega}{v(y'_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (81)$$

$$H_z = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right). \quad (82)$$

TM 波同様、実際の場の振るまいを示すには振動項 $e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}$ を式 (77)-(82) つければよい。図 47 に TE_{01} モードと TE_{11} モードの電磁界分布を示す。

B.4 Cutoff 周波数

導波管の入力部の形状、円形導波管の場合はその半径によって、導波管を伝わることのできる電磁波の周波数が決定される。伝搬定数 γ を減衰定数 α 、位相定数 β を用いて $\gamma = \alpha + j\beta$ と定義すると、電磁界は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\omega t - \gamma z}, \quad (83)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\omega t - \gamma z}. \quad (84)$$

よって、

$$\gamma = j\frac{\omega}{v} \quad (85)$$

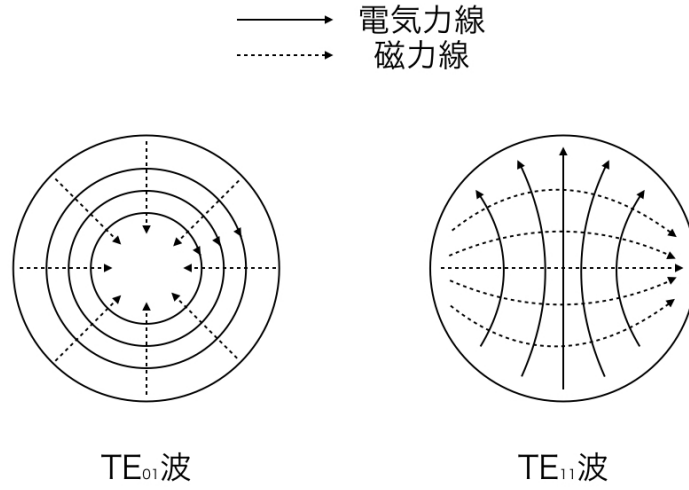


図 47 TE 波の一例 [5][6]

であるが、これを式 (55) に適用し変形すると

$$\gamma = \sqrt{k_n^2 - \omega^2 \varepsilon \mu}. \quad (86)$$

ここで $y = k_n^2 - \omega^2 \varepsilon \mu$ と y を定義すると y は ω の関数であり、 y の正、0、負によって γ が実数、0、虚数と変化する。 $y = 0$ となる ω を ω_c とすると、

$$\omega_c = \sqrt{k_n^2 / \varepsilon \mu}, \quad (87)$$

となり、

$$\left. \begin{array}{ll} \omega < \omega_c & \text{のとき} \quad y > 0, \quad \alpha = \sqrt{y}, \beta = 0 \\ \omega = \omega_c & \text{のとき} \quad y = 0, \quad \alpha = \beta = 0 \\ \omega > \omega_c & \text{のとき} \quad y < 0, \quad \alpha = 0, \beta = \sqrt{-y} \end{array} \right\}$$

物理的には以下のような意味になる。

- $\omega < \omega_c$ 波は減衰し、伝搬はしない。
- $\omega = \omega_c$ 波は伝搬しない。
- $\omega > \omega_c$ 波は減衰せずに、伝搬する。

ω_c を Cutoff 角周波数と呼ぶ。角周波数と周波数の関係より $f_c = \omega_c / 2\pi$ となる f_c を Cutoff 周波数 (遮断周波数) と呼び、周波数 f が f_c より大きい小さいかによって、周波

数 f の電磁波がそれぞれ伝搬するかしないかが決まる。式 (87) より、

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_n^2}{\varepsilon\mu}}. \quad (88)$$

さて、式 (63)、(88) より、円形導波管 TM_{mn} モードの Cutoff 周波数は

$$f_c = \frac{y_{mn}}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (89)$$

また式 (75)、(88) より、円形導波管 TE_{mn} モードの Cutoff 周波数は

$$f_c = \frac{y'_{mn}}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (90)$$

さらに $f_c \lambda_c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ となるような λ_c を Cutoff 波長と呼ぶ。式 (87) より

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{k_n^2}}. \quad (91)$$

また y を λ_c と λ で表すと、

$$y = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda_c^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (92)$$

つまり、次のように言える。

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_c & \text{ のとき伝搬不可} \\ \lambda < \lambda_c & \text{ のとき伝搬可} \end{aligned}$$

よって、円形導波管の TM_{mn} モードの Cutoff 波長は、

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{y_{mn}}. \quad (93)$$

また TE_{mn} モードの Cutoff 波長は、

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{y'_{mn}}. \quad (94)$$

B.5 管内波長

位相定数と波長の間には (位相定数) $\times$ (波長) $= 2\pi$ の関係がある。管内波長 (導波管内での波長) を λ_g とし、管内での位相定数を β_g とすると、

$$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}. \quad (95)$$

減衰定数が無視できるとすると式 (86) より、

$$\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_g^2 = k_n^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2. \quad (96)$$

式 (95)、(96) および $\omega \sqrt{\varepsilon \mu} = 2\pi/\lambda$ より、

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}. \quad (97)$$

または

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (98)$$

と表すことができる。式 (98) の λ_c に対応した Cutoff 波長を代入することにより、それぞれの場合の管内波長を得ることができる。

参考文献

- [1] 平田仁, “マイクロ波工学の基礎”, 日本理工出版会, 2004.
- [2] 中井直正, 坪井昌人, 福井康雄, “シリーズ現代の天文学 16 宇宙の観測 II —電波天文学”, 日本評論社, 2009.
- [3] 滝沢美里, 茨城大学理工学研究科 2011 年度修士論文, “茨城 32m 電波望遠鏡用 6.5-8.8GHz 帯低雑音広帯域受信機システムの開発”.
- [4] 森智彦, 茨城大学理工学研究科 2013 年度修士論文, “茨城局 32m 電波望遠鏡搭載用 22GHz 帯冷却受信機の開発”.
- [5] 堤井信力, “電磁波の基礎”, 内田老鶴圃, 1974, p. 93-108.
- [6] 内藤喜之, “マイクロ波・ミリ波工学”, コロナ社, 1986, p. 48-99.
- [7] Jinal A. Mistry et al, “DESIGN & SIMULATION OF LOW LOSS CIRCULAR CORRUGATED WAVEGUIDE FOR 42 GHZ, 200KW GYROTRON”, International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol-03, Iss-05, p.220-224, 2014.
- [8] Nanni E.A. et al, “Low Loss Transmission Lines for High Power Terahertz Radiation”, Plasma Science and Fusion Center, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 02139 USA.
- [9] G. L. James, “Analysis and Design of TE_{11} -to- HE_{11} corrugated cylindrical waveguide mode converters,” IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, MTT-29, pp. 1059-1066, October 1981.
- [10] Manfred Thumm et al, “Design of Short High-Power TE_{11} - HE_{11} Mode Converters in Highly Overmoded Corrugated Waveguides,” IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, VOL. 39, NO. 2, February 1991.
- [11] E.J. Kowalski et al, “Linearly Polarized Modes of a Corrugated Metallic Waveguide”, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, Submitted Apr. 2010. In Review.