

卒業論文
茨城 32m 電波望遠鏡受信機切り換え用
円形導波管のシミュレーション

平成 26 年度
茨城大学理学部理学科
物理学コース
11S2003S
足立弘

概要

茨城 32m 電波望遠鏡では 6-9GHz 帯、22GHz 帯の受信を行うことができる。しかし現在の 2 つの帯域の切り替えには受信機の乗せ替え作業が必要である。受信機の乗せ替えには多くの時間がとられるためその間の観測時間を失うことになる。受信機の切り替えを行える導波管の開発が本研究の目的である。茨城局に受信機を 2 台搭載するには物理的な干渉を防ぐために 1m 程度の長い導波管が必要である。そこで 6-9GHz 帯では長さ 1000mm、直径 34mm の円形導波管モデルを、22GHz 帯では長さ 1000mm、直径 9.3mm の円形導波管モデルを作成し解析を行った。その結果、6.7GHz で反射損失が約-55.07dB、入力損失が約-0.077dB、22GHz での反射損失が約-47.05dB、入力損失が約-0.575dB の解析結果が得られた。22GHz での入力損失が約-0.575dB(比に直すと約 88%) であり、入力されたエネルギーの約 12% が損失される結果となった。今後はこの損失をいかに抑えるかが課題である。例えば、高周波での低損失を期待できるコルゲート導波管の使用を検討している。

目次

概要	2
1 序論	4
1.1 電波天文学	4
1.2 茨城 32m 電波望遠鏡	4
1.3 研究目的	4
2 円形導波管シミュレーション	6
2.1 解析方法	6
2.2 解析結果	7
3 まとめ	8
付録 A 円形導波管内における電磁波の伝播	9
A.1 円筒座標系	9
A.2 Maxwell 方程式	10
A.3 円形導波管内の電磁場	11
A.4 Cutoff 周波数	15
A.5 管内波長	17
参考文献	19

1 序論

1.1 電波天文学

電磁波とは波長の長さによって、 γ 線、X 線、紫外線、可視光、赤外線、電波と名称を変える。宇宙から伝搬する電磁波のほとんどが大気によって吸収されてしまうが、可視光、電波はあまり吸収されことなく地上に到達する。このため天文学は大昔から可視光で観測されてきた。しかし、天体は可視光だけでなく電波など様々な波長の電磁波を放出しているにもかかわらず、図 1 のように可視光は電磁波うちの極わずかにすぎない。宇宙から到来する電波を観測し、天体の形成過程等を

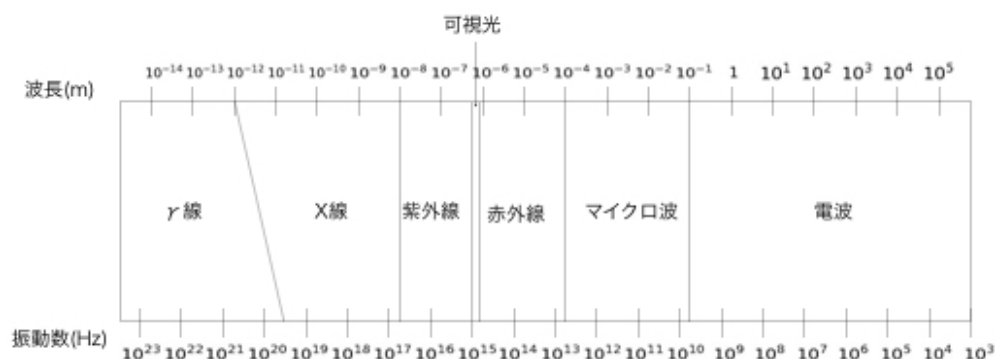


図 1 波長ごとの電磁波の名称

研究する学問が電波天文学である。

1.2 茨城 32m 電波望遠鏡

茨城 32m 電波望遠鏡とは、茨城県日立市と 高萩市にまたがり位置する 2 基の口径 32m の電波望遠鏡のことである。元は KDDI 株式会社が衛星通信用に運用していたが 2007 年にその役目を終え 2009 年に国立天文台に譲渡され電波望遠鏡に改造された。現在は茨城大学宇宙科学教育研究センターを中心に運用されている。大質量星形成領域のみに付随することが分かっている 6.7GHz メタノールメーザーを含む 6-9GHz 帯、および星形成領域や活動銀河核などに付随することが分かっている水メーザー・アンモニア分子輝線を含む 22GHz 帯の受信を行うことができる。

1.3 研究目的

6-9GHz 帯および 22GHz 帯の観測・解析は星形成メカニズム解明のために大変重要である。しかし現在この 2 つの帯域の切り替えには受信機の乗せ替え作業が必要である。普段我々は茨城大学水戸キャンパスに所在を置いているが、乗せ替え作業には高萩市・日立市にあるアンテナまで行かなければならない。さらに受信機は乗せ替え後冷却させなければならない。このように受信機



図2 茨城 32m 電波望遠鏡。奥が日立アンテナ、手前が高萩アンテナ。参考文献 [5] より引用。

の乗せ替えには多くの時間がとられるためその間の観測時間を失うことになる。受信機の切り替えを行える導波管の開発が本研究の目的である。図3は導波管を用いた受信機切り替えのイメージである。

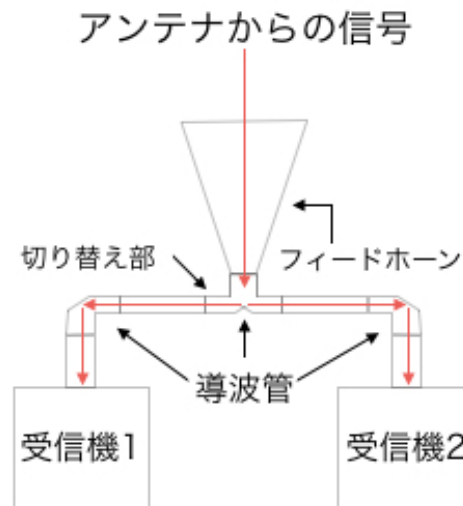


図3 受信機切り替えのイメージ

2 円形導波管シミュレーション

2.1 解析方法

円形導波管内を伝わる電波の反射・入力損失のシミュレーションを3次元電磁界解析ソフト HFSS(High Frequency Structure Simulator) を用いて行った。茨城 32m 電波望遠鏡の受信機設置場所に2つの帯域の受信機を設置する場合、物理的な干渉を避けるために 1000 mm 程度の長さの円形導波管が必要となる。また、現在使用している受信機の電波入力部の直径は、6-9GHz 帯では 32mm[1]、22GHz 帯では 9.3mm[2] である。そこで、6-9GHz 帯では長さ 1000mm、直径 32mm の円形導波管モデルを、22GHz 帯では、長さ 1000mm、直径 9.3mm の円形導波管モデルを作成した。図4に解析モデルを載せる。

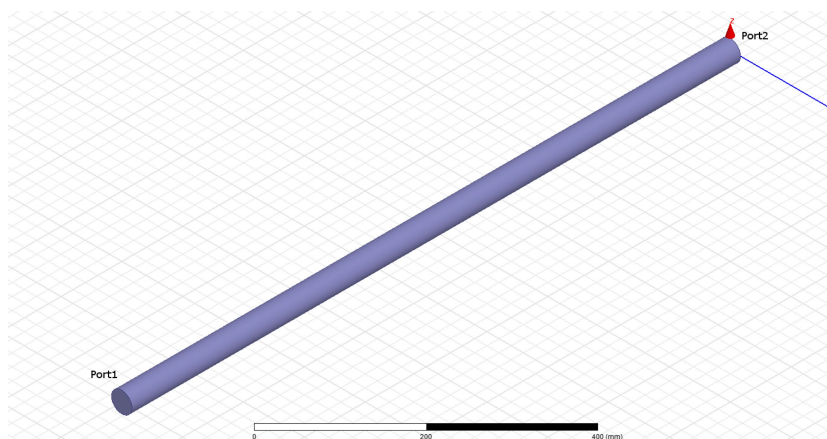


図4 解析モデル

2.2 解析結果

6.7GHz で反射損失が約-55.07dB、入力損失が約-0.077dB、22GHz での反射損失が約-47.05dB、入力損失が約-0.575dB の解析結果が得られた。図 5～図 8 に解析結果を示す。

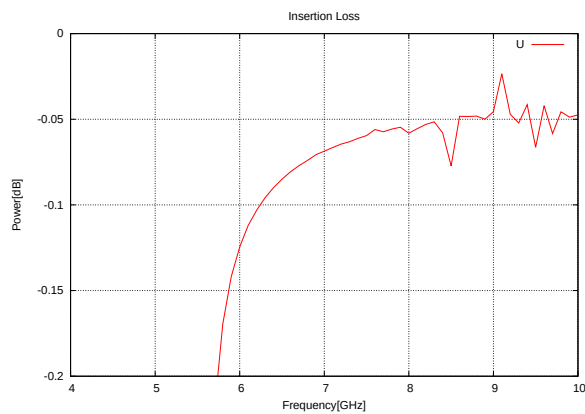


図 5 6-9GHz 帯入力損失

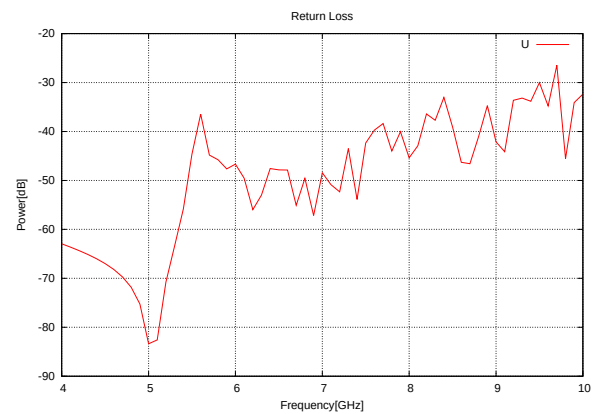


図 6 6-9GHz 帯反射損失

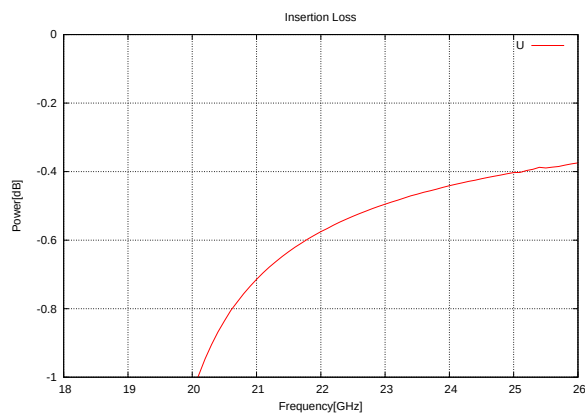


図 7 22GHz 帯入力損失

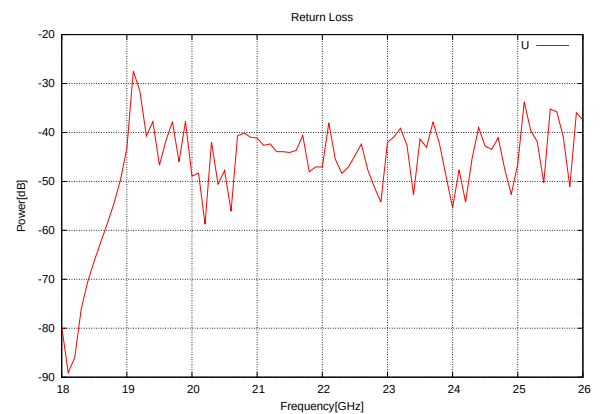


図 8 22GHz 帯反射損失

3 まとめ

一般に電波天文学で用いられる装置には反射損失は-20dB 以下、入力損失は 0dB に近い値が求められる [1][3]。今回のシミュレーションで反射損失は 2 つの帯域で-20dB 以下となり良い結果が得られた。しかし 22GHz での入力損失が約-0.575dB(比に直すと約 88%) であり、入力されたエネルギーの約 12% が損失される結果となった。今後はこの損失をいかに抑えるかが課題である。例えば、高周波での低損失を期待できるコルゲート導波管の使用を検討している。[4]

付録 A 円形導波管内における電磁波の伝播

A.1 円筒座標系

A.1.1 円筒座標系の定義

まず円筒座標系を定義する。図 9 よりデカルト座標系 (x, y, z) と円筒座標系 (r, θ, z) の関係を示す。

$$x = r \cos \theta, \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta, \quad (2)$$

$$z = z. \quad (3)$$

また、基底の関係は以下の通りである。

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad (4)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z. \quad (6)$$

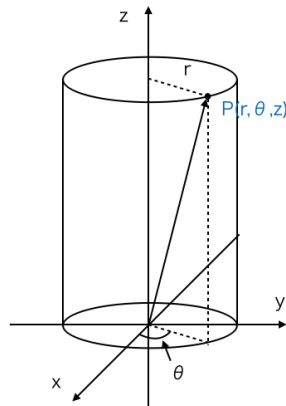


図 9 円筒座標系

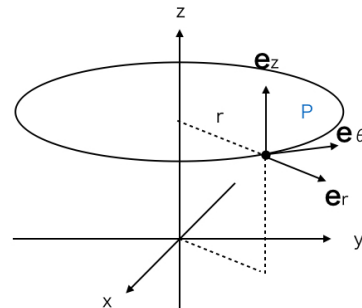


図 10 円筒座標系の基底

A.1.2 円筒座標系の勾配, 発散, 回転

次に円筒座標系での発散、回転を議論する。まずデカルト座標でのナブラは以下のようにかける。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (7)$$

式 45 より、

$$\mathbf{e}_x = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (9)$$

また次の2式、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

に式 12 代入し整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (11)$$

したがって、円筒座標系でのナブラは、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z. \quad (12)$$

次に、円筒座標系でのベクトル場 $\mathbf{A}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z. \quad (13)$$

すると、円筒座標系でのベクトル場 $\mathbf{A}$ の発散、回転は次の通りになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned} \quad (15)$$

A.2 Maxwell 方程式

SI 単位系における Maxwell 方程式とは以下の4つの方程式系のことである。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (18)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (19)$$

上で出てきた諸量はそれぞれ $\mathbf{D}$:電束密度、 $\mathbf{B}$:磁束密度、 $\mathbf{E}$:電場、 $\mathbf{H}$:磁場、 ρ :電荷密度、 $\mathbf{i}$:電流密度、と呼ばれる。さらに次が成り立つ

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (21)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}. \quad (22)$$

σ は電導率、 ε は誘電率、 μ は透磁率と呼ばれる。電波天文学ではしばしば cgsGauss 単位系が使われるがその単位系での Maxwell 方程式を参考までに示す。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

以下で、円形導波管内での TM 波、TE 波の振る舞いを記述するがそれらは全て SI 単位系である。

A.3 円形導波管内の電磁場

円形導波管の中の電磁場を記述するには円筒座標系が便利である。図 9 のように、 r, θ, z を変数にもつ円筒座標を考え半径 a の円形導波管の中心軸を z 軸に合わせると、 z 方向に速度 v で進む平面電磁波は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}, \quad (23)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}. \quad (24)$$

ここで $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ は

$$\mathbf{E}_0(r, \theta) = E_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + E_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta + E_z(r, \theta) \mathbf{e}_z, \quad (25)$$

$$\mathbf{H}_0(r, \theta) = H_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + H_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta + H_z(r, \theta) \mathbf{e}_z. \quad (26)$$

管内での電荷密度 $\rho = 0$ 、電流密度 $\mathbf{i} = 0$ とすると、式 (18)、(19) は式 (21)、(22) より、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (28)$$

式 (18) と式 (28) にそれぞれ、式 (23)、(24) を代入し、式 (15) を適用すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + j \frac{\omega}{v} r E_\theta = -j \omega \mu r H_r, \quad (29)$$

$$-j \frac{\omega}{v} E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j \omega \mu H_\theta, \quad (30)$$

$$\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -j \omega \mu r H_z. \quad (31)$$

また、

$$\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + j \frac{\omega}{v} r H_\theta = j \omega \varepsilon r E_r, \quad (32)$$

$$-j \frac{\omega}{v} H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = j \omega \varepsilon E_\theta, \quad (33)$$

$$\frac{\partial(r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = j \omega \varepsilon r E_z. \quad (34)$$

ここで、式 (29)、(33) および、式 (30)、(32) より、

$$E_r = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\frac{r}{v} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right), \quad (35)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\frac{1}{v} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \mu r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (36)$$

$$H_r = \frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{r}{v} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (37)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega}{k_n^2 r} \left(\varepsilon r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{v} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right). \quad (38)$$

なお、

$$k_n^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - (\omega^2 / v^2), \quad (39)$$

とする。

式 (35) 式 (38) からわかるように、 $E_z = H_z = 0$ となるような解は無意味となる。 $E_z \neq 0, H_z = 0$ となる波を TM 波 (transverse magnetic wave)、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ となる波を TE 波 (transverse electric wave) と呼ぶ。

A.3.1 TM 波

TM 波、つまり $E_z \neq 0, H_z = 0$ の場合。式 (29)～式 (34) に $H_z = 0$ を代入し、 E_z について整理すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + k_n^2 E_z = 0. \quad (40)$$

ここで E_z をそれぞれ r, θ のみの関数の積で、

$$E_z(r, \theta) = E_{z1}(r) E_{z2}(\theta), \quad (41)$$

のように書けるとし、式 (40) に代入して整理すると、

$$\frac{1}{E_{z2}} \frac{d^2 E_{z2}}{d\theta^2} + \frac{1}{E_{z1}} \left\{ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{z1}}{dr} \right) + r^2 k_n^2 E_{z1} \right\} = 0. \quad (42)$$

また便宜上 m を 0 以上の整数として

$$\frac{d^2 E_{z2}}{d\theta^2} = -m^2 E_{z2}, \quad (43)$$

が成り立つものと仮定して式 (42) を書き直すと、

$$\frac{d^2 E_{z1}}{d(k_n r)^2} + \frac{1}{k_n r} \frac{dE_{z1}}{d(k_n r)} + \left\{ 1 - \frac{m^2}{(k_n r)^2} \right\} E_{z1} = 0. \quad (44)$$

これは $k_n r$ を変数とした Bessel の微分方程式であり、 E_{z1} の解は Bessel 関数 $J_m(k_n r)$ で与えられる。ここで m は Bessel 関数の次数である。式 (43) が成り立つためには E_{z2} が $\cos(m\theta)$ または

$\sin(m\theta)$ でなければならないが、 $m = 0$ のとき E_{z2} が零とならないように $\cos(m\theta)$ を採用する。
したがって、 $E_{z1} = J_m(k_n r)$ 、 $E_{z2} = \cos(m\theta)$ なので式 (41) より

$$E_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m(k_n r). \quad (45)$$

境界条件より、導体面上では電界の接線成分がゼロでなければならないので、 $r = a$ のとき $E_z = 0$ である。それを満たすには、 $r = a$ で $\cos(m\theta)$ が零となるとは限らないので

$$J_m(k_n a) = 0, \quad (46)$$

の条件が必要である。式 (45) の解は多数存在するが、一般に y_{mn} と書きあらわし、計算によって与えられる。ここで添字の m は Bessel 関数の次数を n は根の番号を示しその値は小さいものから順番につける。根 y_{mn} の低次の値をいくつかを表 1 に示す。

$\begin{matrix} \backslash & n \\ m & \end{matrix}$	1	2	3
0	2.40	5.52	8.65
1	3.83	7.02	10.17
2	5.14	8.42	11.62

表 1 $J_m(y_{mn}) = 0$ の根 y_{mn} の値

この式 (46) の条件より、

$$k_n = \frac{y_{mn}}{a}, \quad (47)$$

となり式 (45) は、

$$E_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right). \quad (48)$$

よって、式 (48)、式 (35)～(38)、 $H_z = 0$ により TM 波の他成分が求められる。

$$E_r = -\frac{j\omega}{v(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right), \quad (49)$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega m}{v(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right), \quad (50)$$

$$E_z = \cos(m\theta) J_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right), \quad (51)$$

$$H_r = -\frac{j\omega \varepsilon m}{v(y_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) \frac{1}{r} J_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right), \quad (52)$$

$$H_\theta = -\frac{j\omega}{v(y_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m\left(\frac{y_{mn}}{a} r\right), \quad (53)$$

$$H_z = 0. \quad (54)$$

実際の場合には振動項 $e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}$ をつければよい。さて上式からわかるように m と n の数によって様々な電磁界が存在しうる。このような電磁界の組み合わせをモード (mode) と呼び、 TM_{mn} と書いてモードの違いを表す。導波管断面における電磁界の分布は式 (49)～(54) からわかるが、その一例を図 11 に示す。

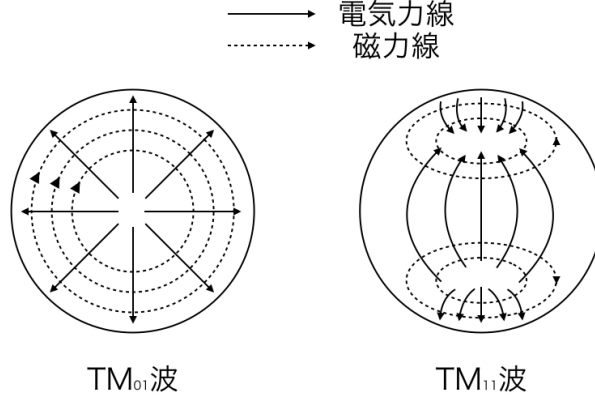


図 11 TM 波の一例

A.3.2 TE 波

TE 波つまり、 $E_z = 0, H_z \neq 0$ の場合。TM 波の場合と同様、式 (29)～式 (34) に $E_z = 0$ を代入し、 H_z について整理すると、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + k_n^2 H_z = 0. \quad (55)$$

式 (55) の解は TM 波の場合と同様 Bessel 関数で与えられる。

$$H_z = \cos(m\theta) J_m(k_n r). \quad (56)$$

境界条件により、 $r = a$ での電界の接線成分はゼロ ($E_\theta = 0$)、また $E_z = 0$ から式 (29) より $H_r = 0$ したがって式 (33) より ($r = a$) において、

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = 0, \quad (57)$$

なる条件が成り立つ。ゆえに式 (56) から、

$$J'_m(k_n a) = 0, \quad (58)$$

となる。ここで $J'_m(k_n a)$ は $J_m(k_n r)$ を変数 $k_n r$ で微分して $r = a$ と置いたものである。この式の解は数学的にあらかじめ与えられる。これを y'_{mn} とおくとその値は表 2 のようになる。

さて k_n は式 (58) より、

$$k_n = \frac{y'_{mn}}{a}. \quad (59)$$

$\begin{array}{c} \text{m} \backslash \text{n} \end{array}$	1	2	3
0	3.83	7.02	10.17
1	1.84	5.33	8.54
2	3.05	6.71	9.97

表2 $J'_m(y'_{mn}) = 0$ の根 y'_{mn} の値

したがって、 H_z は、

$$H_z(r, \theta) = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (60)$$

またその他の成分は H_z を式 (35)～(38) に代入することにより、求めることができる。

$$E_r = \frac{j\omega\mu m}{(y'_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (61)$$

$$E_\theta = \frac{j\omega\mu}{(y'_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (62)$$

$$E_z = 0, \quad (63)$$

$$H_r = -\frac{j\omega}{v(y'_{mn}/a)} \cos(m\theta) J'_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (64)$$

$$H_\theta = \frac{j\omega}{v(y'_{mn}/a)^2} \sin(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right), \quad (65)$$

$$H_z = \cos(m\theta) J_m \left(\frac{y'_{mn}}{a} r \right). \quad (66)$$

TM 波同様、実際の場合には振動項 $e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}}$ をつければよい。図 12 に TE_{01} モードと TE_{11} モードの電磁界分布を示す。

A.4 Cutoff 周波数

導波管の入力部の形状、円形導波管の場合はその半径によって、導波管を伝わるすることができる電磁波の周波数が決定される。伝搬定数 γ を減衰定数 α 、位相定数 β を用いて $\gamma = \alpha + j\beta$ と定義すると電磁界は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}} = \mathbf{E}_0(r, \theta) e^{j\omega t - \gamma z}, \quad (67)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\{\omega t - (\omega/v)z\}} = \mathbf{H}_0(r, \theta) e^{j\omega t - \gamma z}. \quad (68)$$

よって、

$$\gamma = j \frac{\omega}{v} \quad (69)$$

であるが、これを式 (39) に適用し変形すると

$$\gamma = \sqrt{k_n^2 - \omega^2 \varepsilon \mu}. \quad (70)$$

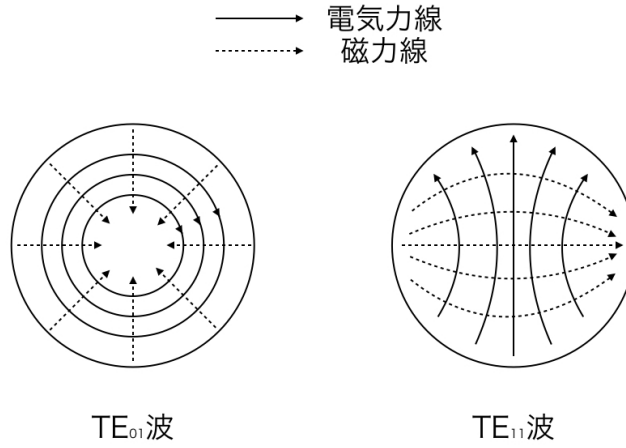


図 12 TE 波の一例

ここで $y = k_n^2 - \omega^2 \varepsilon \mu$ と y を定義すると y は ω の関数であり、 y の正、0、負によって γ が実数、0、虚数と変化する。 $y = 0$ となる ω を ω_c とすると、

$$\omega_c = \sqrt{k_n^2 / \varepsilon \mu}, \quad (71)$$

となり、

$$\left. \begin{array}{ll} \omega < \omega_c & \text{のとき } y > 0, \quad \alpha = \sqrt{y}, \beta = 0 \\ \omega = \omega_c & \text{のとき } y = 0, \quad \alpha = \beta = 0 \\ \omega > \omega_c & \text{のとき } y < 0, \quad \alpha = 0, \beta = \sqrt{-y} \end{array} \right\}$$

物理的には以下のような意味になる。

$$\left. \begin{array}{ll} \omega < \omega_c & \text{波は減衰し、伝搬はしない。} \\ \omega = \omega_c & \text{波は伝搬しない。} \\ \omega > \omega_c & \text{波は減衰せずに、伝搬する。} \end{array} \right\}$$

ω_c を Cutoff 角周波数と呼ぶ。角周波数と周波数の関係より $f_c = \omega_c / 2\pi$ となる f_c を Cutoff 周波数と呼び周波数 f が f_c より大きい、小さいかによって周波数 f の電磁波がそれぞれ伝搬するしないかが決まる。式 (71) より、

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_n^2}{\varepsilon \mu}}. \quad (72)$$

さて、式 (47)、(72) より、円形導波管 TM_{mn} モードの Cutoff 周波数は

$$f_c = \frac{y_{mn}}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \quad (73)$$

また式 (59)、(72) より、円形導波管 TE_{mn} モードの Cutoff 周波数は

$$f_c = \frac{y'_{mn}}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (74)$$

さらに $f_c \lambda_c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ となるような λ_c を Cutoff 波長と呼ぶ。式 (71) より

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\sqrt{k_n^2}}. \quad (75)$$

また y を λ_c と λ で表すと、

$$y = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda_c^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (76)$$

つまり、次のように言える。

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_c & \text{ のとき伝搬不可} \\ \lambda < \lambda_c & \text{ のとき伝搬可} \end{aligned}$$

よって、円形導波管の TM_{mn} モードの Cutoff 波長は、

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{y_{mn}}. \quad (77)$$

また TE_{mn} モードの Cutoff 波長は、

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{y'_{mn}}. \quad (78)$$

A.5 管内波長

位相定数と波長の間には (位相定数)×(波長)= 2π の関係がある。管内波長 (導波管内での波長) を λ_g とし、管内での位相定数を β_g とすると、

$$\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}. \quad (79)$$

減衰定数が無視できるとすると式 (70) より、

$$\omega^2 \varepsilon \mu - \beta_g^2 = k_n^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2. \quad (80)$$

式 (79)、(80) および $\omega \sqrt{\varepsilon\mu} = 2\pi/\lambda$ より、

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}. \quad (81)$$

または

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}, \quad (82)$$

と表すことができる。式 (82) の λ_c に場合に依じた Cutoff 波長を代入することにより、それぞれの場合の管内波長を得ることができる。

参考文献

- [1] 滝沢美里, 茨城大学理工学研究科 2011 年度修士論文, “茨城 32m 電波望遠鏡用 6.5-8.8GHz 帯低雑音広帯域受信機システムの開発” .
- [2] 森智彦, 茨城大学理工学研究科 2013 年度修士論文, “茨城局 32m 電波望遠鏡搭載用 22GHz 帯冷却受信機の開発” .
- [3] Soon Kang Lou, 茨城大学理工学研究科 2013 年度修士論文, “VERA 搭載用 86GHz 帯セプタム型円偏波ポーライザーの開発” .
- [4] Jinal A. Mistry et al, “DESIGN & SIMULATION OF LOW LOSS CIRCULAR CORRUGATED WAVEGUIDE FOR 42 GHZ, 200KW GYROTRON” ,2014, International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol-03, Iss-05, p.220-224.
- [5] 松本浩平, 大阪府立大学理学系研究科 2010 年度修士論文, “超長基線電波干渉計に用いる 6.7 GHz 帯受信機の広帯域化に関する研究開発” .
- [6] 千葉元貴, 茨城大学理学部理学科 2013 年度卒業論文, “茨城 32m 電波望遠鏡 22GHz 帯アラン分散測定と評価” .
- [7] 堤井信力, “電磁波の基礎” , 内田老鶴圃,1974, p. 93-99.
- [8] 中井直正, 坪井昌人, 福井康雄, “シリーズ現代の天文学 16 宇宙の観測 II ー電波天文学” , 日本評論社, 2009.